

# Capitolo 1

## Sistemi meccanici discreti non vincolati

Introduciamo gli strumenti per descrivere il moto di un sistema di punti materiali  $P_1, \dots, P_N$  dotati di masse  $m_1, \dots, m_N$ , soggetti a forze esterne assegnate, che si possono muovere liberamente nello spazio ambiente.

### 1.1 Spazio, tempo e sistemi di riferimento

Assumiamo che lo spazio ambiente sia uno spazio euclideo tridimensionale, che indichiamo con il simbolo  $\mathbb{E}^3$ . Esso è dunque uno spazio affine reale di dimensione tre a cui è associato<sup>1</sup> uno spazio vettoriale  $\mathbb{V}^3$  dotato di un prodotto scalare, che indichiamo con  $\cdot$ , cioè di una forma bilineare simmetrica definita positiva  $\mathbb{V}^3 \times \mathbb{V}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . Possiamo introdurre su  $\mathbb{V}^3$  la norma

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}, \quad \vec{u} \in \mathbb{V}^3$$

e, con questa, la distanza tra i punti di  $\mathbb{E}^3$ :

$$d(P, Q) = |P - Q|, \quad P, Q \in \mathbb{E}^3.$$

Introduciamo anche lo spazio prodotto  $\mathbb{G} = \mathbb{E}^3 \times \mathbb{R}$ , che chiamiamo **spazio-tempo di Galileo**. Gli elementi di  $\mathbb{G}$  si chiamano eventi. Si può pensare  $\mathbb{G}$  come composto da fibre della forma  $\mathbb{E}^3 \times \{t\}$ , al variare di  $t \in \mathbb{R}$ . A queste fibre, che chiamiamo spazi degli eventi simultanei, possiamo attribuire la stessa struttura euclidea di  $\mathbb{E}^3$ . Possiamo quindi misurare la distanza  $\tilde{d}$  tra eventi simultanei tramite la formula

$$\tilde{d}((P, t), (Q, t)) = d(P, Q), \quad (P, t), (Q, t) \in \mathbb{G}.$$

---

<sup>1</sup>scelti comunque due punti  $P, Q \in \mathbb{E}^3$  la loro differenza  $P - Q$  è un vettore di  $\mathbb{V}^3$ . Inoltre, scelti comunque un punto  $Q \in \mathbb{E}^3$  e un vettore  $\vec{v} \in \mathbb{V}^3$  la loro somma  $Q + \vec{v}$  è un punto  $P \in \mathbb{E}^3$  e si ha  $P - Q = \vec{v}$ . In questo contesto la somma  $P + Q$  di due punti di  $\mathbb{E}^3$  non ha senso.

## Prodotto vettoriale

Chiamiamo prodotto vettoriale (o prodotto vettore) su  $\mathbb{V}^3$  un'applicazione  $\mathbb{V}^3 \times \mathbb{V}^3 \rightarrow \mathbb{V}^3$  bilineare, antisimmetrica, che denotiamo con  $\times$ , tale che

- i) se  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  allora  $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|$ ,
- ii)  $\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{v} \times \vec{w} \cdot \vec{u}$ ,

per ogni  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}^3$ .

**Osservazione 1.** *Dalla proprietà antisimmetrica segue che*

$$\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}, \quad \forall \vec{u} \in \mathbb{V}^3. \quad (1.1)$$

**Proposizione 1.** *Sullo spazio  $\mathbb{V}^3$ , dotato del prodotto scalare  $\cdot$ , possiamo definire solamente due prodotti vettoriali  $\times'$ ,  $\times''$ , il cui risultato differisce solo per il segno e, scelta una base ortonormale  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ , risulta*

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 \times' \hat{e}_2 &= \hat{e}_3, & \hat{e}_2 \times' \hat{e}_3 &= \hat{e}_1, & \hat{e}_3 \times' \hat{e}_1 &= \hat{e}_2, \\ \hat{e}_1 \times'' \hat{e}_2 &= -\hat{e}_3, & \hat{e}_2 \times'' \hat{e}_3 &= -\hat{e}_1, & \hat{e}_3 \times'' \hat{e}_1 &= -\hat{e}_2. \end{aligned} \quad (1.2)$$

*Dimostrazione.* Utilizziamo il seguente risultato:

**Lemma 1.** *Le relazioni(1.2) definiscono due applicazioni bilineari e antisimmetriche  $\times'$ ,  $\times''$  che soddisfano le proprietà i), ii).*

*Dimostrazione.* Assumiamo che, fissata una base ortonormale  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ , valga la prima delle (1.2). Verifichiamo la i) mostrando che vale la relazione

$$|\vec{u} \times' \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2, \quad \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}^3. \quad (1.3)$$

Dati  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}^3$  scriviamo

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^3 u_i \hat{e}_i, \quad \vec{v} = \sum_{j=1}^3 v_j \hat{e}_j,$$

per certi  $u_i, v_j \in \mathbb{R}$ , per cui

$$\begin{aligned} \vec{u} \times' \vec{v} &= \sum_{i,j=1}^3 u_i v_j \hat{e}_i \times' \hat{e}_j = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} (u_i v_j - u_j v_i) \hat{e}_i \times' \hat{e}_j \\ &= (u_1 v_2 - u_2 v_1) \hat{e}_3 + (u_2 v_3 - u_3 v_2) \hat{e}_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \hat{e}_2, \end{aligned}$$

quindi

$$|\vec{u} \times' \vec{v}|^2 = (u_1v_2 - u_2v_1)^2 + (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2.$$

Facendo alcune cancellazioni si ottiene

$$\begin{aligned} |\vec{u} \times' \vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 &= -2(u_1u_2v_1v_2 + u_1u_3v_1v_3 + u_2u_3v_2v_3) - u_1^2v_1^2 - u_2^2v_2^2 - u_3^2v_3^2 \\ &= -(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2. \end{aligned}$$

Inoltre, poiché la base  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$  è ortonormale, si ha

$$u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = \vec{u} \cdot \vec{v},$$

che dimostra (1.3).

Visto che le applicazioni  $\times'$  e  $\cdot$  sono bilineari, per verificare la ii) basta notare che essa vale sugli elementi della base ortonormale.<sup>2</sup> Infatti, in tal caso per ogni  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}^3$  si ha

$$\begin{aligned} \vec{u} \times' \vec{v} \cdot \vec{w} &= \left( \sum_{i=1}^3 u_i \hat{e}_i \times' \sum_{j=1}^3 v_j \hat{e}_j \right) \cdot \sum_{h=1}^3 w_h \hat{e}_h = \sum_{i,j,h=1}^3 u_i v_j w_h \hat{e}_i \times' \hat{e}_j \cdot \hat{e}_h \\ &= \sum_{i,j,h=1}^3 u_i v_j w_h \hat{e}_j \times' \hat{e}_h \cdot \hat{e}_i = \left( \sum_{j=1}^3 v_j \hat{e}_j \times' \sum_{h=1}^3 w_h \hat{e}_h \right) \cdot \sum_{i=1}^3 u_i \hat{e}_i = \vec{v} \times' \vec{w} \cdot \vec{u}. \end{aligned}$$

Se vale la seconda delle (1.2) si procede in modo analogo. □

Concludiamo adesso la dimostrazione della Proposizione 1. Consideriamo un'applicazione  $\mathbb{V}^3 \times \mathbb{V}^3 \rightarrow \mathbb{V}^3$  bilineare e antisimmetrica con le proprietà i), ii) del prodotto vettore elencate sopra. Per ogni  $\vec{v} \in \mathbb{V}^3$ , dalla ii) e da (1.1) si ha

$$\vec{u} \times \vec{v} \in \vec{v}^\perp, \quad \forall \vec{u} \in \mathbb{V}^3, \quad (1.4)$$

dove

$$\vec{v}^\perp = \{\vec{w} \in \mathbb{V}^3 : \vec{w} \cdot \vec{v} = 0\}.$$

Data una base ortonormale  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$  di  $\mathbb{V}^3$ , da i) segue che  $|\hat{e}_1 \times \hat{e}_2| = 1$  e da (1.4) si ha

$$\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 \in \hat{e}_1^\perp \cap \hat{e}_2^\perp = \text{span}(\hat{e}_3),$$

quindi

$$\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \pm \hat{e}_3.$$

---

<sup>2</sup>si usa la proprietà antisimmetrica per dire che  $\hat{e}_j \times \hat{e}_j = \vec{0}$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

Inoltre, se  $\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = +\hat{e}_3$ , si ha anche

$$\hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = \hat{e}_1, \quad \hat{e}_3 \times \hat{e}_1 = \hat{e}_2. \quad (1.5)$$

Infatti, ragionando come prima si ottiene  $\hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = \pm\hat{e}_1$  e, se valesse  $\hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = -\hat{e}_1$ , usando ii) avremmo la seguente contraddizione:

$$-1 = \hat{e}_2 \times \hat{e}_3 \cdot \hat{e}_1 = \hat{e}_1 \times \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_3 = 1.$$

La seconda relazione in (1.5) si dimostra in modo simile. Procedendo in modo analogo si ottiene che se invece vale  $\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = -\hat{e}_3$  si ha

$$\hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = -\hat{e}_1, \quad \hat{e}_3 \times \hat{e}_1 = -\hat{e}_2.$$

□

Nel seguito considereremo solo terne ortonormali **levogire**, cioè terne che soddisfano la cosiddetta **regola della mano destra**: se distendiamo il pollice, l'indice e il medio della mano destra in modo che queste dita descrivano tre direzioni ortogonali seguendo la conformazione naturale della mano, esse indicano rispettivamente l'orientazione dei vettori  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  di una terna levogira.

Data una terna levogira, conveniamo di scegliere il prodotto vettoriale  $\times'$  su  $\mathbb{V}^3$ , che indicheremo con  $\times$  per semplicità. Varranno quindi le formule

$$\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{e}_3, \quad \hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = \hat{e}_1, \quad \hat{e}_3 \times \hat{e}_1 = \hat{e}_2. \quad (1.6)$$

**Esercizio 1.** *Mostrare che vale la seguente proprietà (formula del prodotto triplo):*

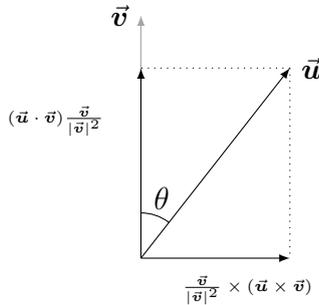
$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{u}, \quad \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}^3. \quad (1.7)$$

Notiamo che il prodotto vettoriale non è associativo, infatti dalla formula del prodotto triplo e dalla proprietà antisimmetrica otteniamo

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} - \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w} - (\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{u}$$

che in generale è non nullo.

Dato  $\vec{v} \in \mathbb{V}^3$ , ogni vettore  $\vec{u} \in \mathbb{V}^3$  si può scomporre in modo unico come combinazione lineare di due vettori ortogonali, uno dei quali è parallelo a  $\vec{v}$ :



$$\vec{u} = \frac{1}{|\vec{v}|^2} [(\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{v} + \vec{v} \times (\vec{u} \times \vec{v})], \quad (1.8)$$

infatti

$$\vec{v} \times (\vec{u} \times \vec{v}) = |\vec{v}|^2 \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{v}.$$

Il termine  $(\vec{u} \cdot \vec{v})/|\vec{v}|$  è la proiezione ortogonale di  $\vec{u}$  lungo  $\vec{v}$  e l'angolo  $\theta \in [0, \pi]$  tra  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  è definito da

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}. \quad (1.9)$$

Dalle relazioni (1.3), (1.9) si ottiene

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sqrt{1 - \cos^2 \theta} = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \theta.$$

Dati

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

vettori di  $\mathbb{R}^3$ , introduciamo il prodotto scalare

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{h=1}^3 x_h y_h,$$

e il prodotto vettoriale

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = (x_2 y_3 - x_3 y_2) \mathbf{e}_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) \mathbf{e}_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \mathbf{e}_3,$$

dove

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono i vettori della base canonica di  $\mathbb{R}^3$ . Osserviamo che valgono le formule

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2.$$

## Sistemi di riferimento

La descrizione del moto di un sistema di punti materiali richiede l'introduzione di un sistema di riferimento, che permetta di individuare la posizione dei punti nello spazio ambiente in cui avviene il moto.

Un sistema di riferimento (o più brevemente un riferimento) in  $\mathbb{E}^3$  è una mappa continua

$$t \mapsto \Sigma(t) = (O(t), \hat{\mathbf{e}}_1(t), \hat{\mathbf{e}}_2(t), \hat{\mathbf{e}}_3(t)) \in \mathbb{E}^3 \times (\mathbb{V}^3)^3$$

definita su  $\mathbb{R}$  o su un intervallo  $I \subset \mathbb{R}$ , in cui  $O = O(t) \in \mathbb{E}^3$  si chiama origine del riferimento, ed i vettori  $\hat{\mathbf{e}}_j = \hat{\mathbf{e}}_j(t) \in \mathbb{V}^3$ , che indicano le direzioni degli assi, sono tali che

$$\hat{\mathbf{e}}_i(t) \cdot \hat{\mathbf{e}}_j(t) = \delta_{ij} \quad \forall i, j, \forall t,$$

dove  $\delta_{ij}$  è il delta di Kronecker, che vale 1 per  $i = j$ , 0 per  $i \neq j$ .

Per indicare gli elementi di un sistema di riferimento  $\Sigma$  useremo la notazione più semplice  $O \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$ , oppure  $Oxyz$ . Nel caso del moto in un piano scriveremo anche  $O\hat{e}_1 \hat{e}_2$ , oppure  $Oxy$ , per indicare gli elementi del riferimento in tale piano, intendendo che il vettore  $\hat{e}_3$  è ortogonale al piano e la terna  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$  soddisfa le relazioni (1.6).

## Rappresentazione in coordinate

Dato un punto  $P \in \mathbb{E}^3$  e un riferimento  $\Sigma = O \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$ , possiamo associare in modo unico a tale punto un vettore di coordinate in  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathbb{E}^3 \ni P \longleftrightarrow \vec{x}_P = P - O = \sum_{i=1}^3 x_i \hat{e}_i \in \mathbb{V}^3 \longleftrightarrow \mathbf{x}_P = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3, \quad (1.10)$$

dove il simbolo ‘ $T$ ’ indica l’operazione di trasposizione, cioè  $\mathbf{x}_P$  è un vettore colonna. In seguito, nella scrittura delle formule, utilizzeremo sia la notazione in  $\mathbb{V}^3$  (indicando i vettori con un simbolo in grassetto con la freccetta sopra, o come differenza tra punti) che quella in coordinate in  $\mathbb{R}^3$  (simbolo in grassetto senza freccetta).

## 1.2 Descrizione del moto

Il moto di un punto  $P \in \mathbb{E}^3$  è una mappa

$$t \mapsto P(t) \in \mathbb{E}^3 \quad (1.11)$$

definita su  $\mathbb{R}$  o su un suo intervallo.

Dato il moto  $P(t)$  e un riferimento  $\Sigma = O \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$ , possiamo definire ad ogni istante  $t$  la posizione di  $P$  relativa a  $\Sigma$  come

$$\vec{x}_P = P - O = \sum_{i=1}^3 x_i \hat{e}_i,$$

dove  $x_i = x_i(t)$  sono le coordinate di  $P$  al tempo  $t$  in  $\Sigma$ . Il moto di  $P$  è anche dato dalla mappa  $t \mapsto \mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$  delle sue coordinate al variare del tempo. Se esistono le derivate prima e seconda di  $x_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , possiamo definire la velocità e l’accelerazione di  $P$  relativa a  $\Sigma$  rispettivamente come

$$\begin{aligned} \vec{v}_P &= \left. \frac{d}{dt}(P - O) \right|_{\Sigma} = \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \hat{e}_i, \\ \vec{a}_P &= \left. \frac{d^2}{dt^2}(P - O) \right|_{\Sigma} = \sum_{i=1}^3 \ddot{x}_i \hat{e}_i. \end{aligned}$$

Tramite la (1.10) possiamo identificare queste quantità con i rispettivi vettori delle loro coordinate in  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathbf{x}_P = (x_1, x_2, x_3)^T, \quad \mathbf{v}_P = \dot{\mathbf{x}}_P = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)^T, \quad \mathbf{a}_P = \ddot{\mathbf{x}}_P = (\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ddot{x}_3)^T.$$

Nel seguito eviteremo di scrivere l'indice  $P$  quando sarà chiaro il punto a cui ci riferiamo, quindi ad esempio scriveremo  $\vec{\mathbf{x}}, \mathbf{x}$  al posto di  $\vec{\mathbf{x}}_P, \mathbf{x}_P$ .

L'operazione di derivata temporale di una mappa vettoriale  $t \mapsto \vec{\mathbf{u}}(t) \in \mathbb{V}^3$  dipende dalla base in cui si scrivono le componenti e quindi dalla scelta del riferimento. Utilizzeremo la notazione  $\left. \frac{d\vec{\mathbf{u}}}{dt} \right|_{\Sigma}$  per indicare esplicitamente tale dipendenza.

## 1.3 Le equazioni del moto

### Le forze

Dato un sistema di  $N$  punti materiali e fissato un riferimento  $\Sigma = O \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3$  assumiamo che la forza agente sul punto  $P_i$  sia esprimibile da una funzione

$$\vec{\mathbf{F}}_i : (\mathbb{V}^3)^N \times (\mathbb{V}^3)^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{V}^3$$

che dipende solo dalle posizioni  $\vec{\mathbf{x}}_i = P_i - O$  e dalle velocità  $\vec{\mathbf{v}}_i = \left. \frac{d}{dt}(P_i - O) \right|_{\Sigma}$  dei punti del sistema e dal tempo  $t$ , quindi

$$\vec{\mathbf{F}}_i = \vec{\mathbf{F}}_i(\vec{\mathbf{x}}_1, \dots, \vec{\mathbf{x}}_N, \vec{\mathbf{v}}_1, \dots, \vec{\mathbf{v}}_N, t).$$

In coordinate nel riferimento  $\Sigma$  questa si scrive come una funzione

$$\mathbf{F}_i : (\mathbb{R}^3)^N \times (\mathbb{R}^3)^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

delle variabili  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, t$ .

Nel Capitolo 4 mostreremo come cambiano le forze agenti sui punti  $P_i$  al variare del sistema di riferimento scelto.

### Le equazioni di Newton

Il principio del **determinismo meccanicistico** ci dice che la conoscenza dello stato cinetico (posizione e velocità) di un sistema di  $N$  punti materiali ad un certo istante permette di determinare tutta la sua evoluzione temporale.

Dato un sistema formato dai punti  $P_i, i = 1, \dots, N$ , di masse  $m_i$ , soggetti alle forze  $\vec{\mathbf{F}}_i$  nel sistema di riferimento  $\Sigma$ , assumiamo che valgano le equazioni di Newton (*secondo principio della Dinamica*). Più precisamente, siano

$$\vec{\mathbf{x}} = (\vec{\mathbf{x}}_1, \dots, \vec{\mathbf{x}}_N), \quad \vec{\mathbf{v}} = (\vec{\mathbf{v}}_1, \dots, \vec{\mathbf{v}}_N)$$

i vettori delle posizioni e velocità degli  $N$  punti. Se

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i(\vec{x}, \vec{v}, t)$$

è la forza agente sul punto  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , allora si assume che il moto  $t \mapsto \mathbf{x}(t)$  sia soluzione del sistema di equazioni differenziali del secondo ordine

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i(\vec{x}, \vec{v}, t) \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.12)$$

oppure, in coordinate in  $\Sigma$ ,

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.13)$$

Le equazioni precedenti si possono scrivere come sistema del primo ordine introducendo le incognite  $\mathbf{v}_i$ :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{v}_i \\ \dot{\mathbf{v}}_i = \frac{1}{m_i} \mathbf{F}_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \end{cases} \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.14)$$

Il sistema (1.14) insieme alle posizioni e velocità dei punti a un certo istante iniziale definiscono un problema di Cauchy. L'esistenza e l'unicità di una soluzione di questo problema in un intorno del tempo iniziale è assicurata dalla teoria delle equazioni differenziali se le funzioni  $\mathbf{F}_i$  sono, ad esempio, di classe  $C^1$ .

**Esercizio 2.** *Trasformare in un sistema del primo ordine le equazioni di Newton*

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -y\dot{x}, \\ m\ddot{y} = x^2 + xy. \end{cases}$$

## 1.4 I riferimenti inerziali

Trattiamo adesso i sistemi di riferimento inerziali, nei quali *‘ogni corpo persiste nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme fino a quando non sia costretto a mutare il suo stato dall'azione di una forza.’*<sup>3</sup> Questa è la formulazione che Newton dà al suo primo principio della Dinamica, o principio di inerzia.

<sup>3</sup>I. Newton, da *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (1687). ‘Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.’

## Trasformazioni di Galileo

Consideriamo l'insieme  $\mathcal{G}$  delle trasformazioni affini dello spazio-tempo di Galileo  $\mathbb{E}^3 \times \mathbb{R}$  che conservano gli intervalli di tempo tra due eventi, con la loro orientazione, e la distanza tra eventi simultanei. Fissato un sistema di riferimento, possiamo identificare lo spazio-tempo di Galileo con lo spazio delle sue coordinate  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$  e considerare  $\mathcal{G}$  agente su quest'ultimo.

Sia  $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n)$  l'insieme delle matrici quadrate di ordine  $n \in \mathbb{N}$  a coefficienti reali. Introduciamo l'insieme

$$O(3) = \{A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(3) : AA^T = A^T A = I\}$$

delle matrici ortogonali di ordine 3, dove  $I$  è la matrice identità. Osserviamo che, per  $A \in O(3)$ , si ha  $1 = \det(AA^T) = (\det A)^2$ , per cui  $\det A = \pm 1$ . Denotiamo con  $SO(3)$  l'insieme delle matrici di  $O(3)$  che hanno determinante uguale a 1.

**Proposizione 2. (Eulero)** *Gli elementi di  $SO(3)$  diversi dall'identità sono matrici di rotazione attorno ad un asse passante per l'origine.*

*Dimostrazione.* Mostriamo che ogni matrice  $R \in SO(3)$  ha l'autovalore 1. Per ogni  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ , da  $R\mathbf{x} \cdot R\mathbf{x} = R^T R\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$  segue che  $|R\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$ , cioè  $R$  è una **isometria**. Dunque se  $\lambda$  è un autovalore di  $R$  si ha  $|\lambda| = 1$ . Vale inoltre la relazione seguente:

$$\det(R - I) = \det R^T \det(R - I) = \det(R^T(R - I)) = \det(I - R^T) = \det(I - R),$$

dove abbiamo usato il fatto che  $\det(R^T) = \det(R) = 1$  e il teorema di Binet.<sup>4</sup> Se  $A$  è una matrice di ordine 3, per le proprietà dei determinanti si ha

$$\det(-A) = (-1)^3 \det(A) = -\det A.$$

Concludo che

$$\det(R - I) = 0,$$

quindi  $R$  ha l'autovalore  $\lambda_1 = 1$ . Gli altri autovalori  $\lambda_2, \lambda_3$  devono soddisfare le condizioni

$$\lambda_2 \lambda_3 = 1, \quad |\lambda_2| = |\lambda_3| = 1,$$

quindi si hanno 3 casi:<sup>5</sup> i)  $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ , ii)  $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ , iii)  $\lambda_3 = \overline{\lambda_2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ,  $\lambda_2 = \mu + i\nu$ ,  $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ ,  $\nu \neq 0$ .

Nel caso i) si ha  $R = I$ , cioè  $R$  rappresenta la rotazione che lascia invariato ogni elemento di  $\mathbb{R}^3$ .

<sup>4</sup>per ogni coppia di matrici quadrate  $A, B$  dello stesso ordine si ha  $\det(AB) = \det A \det B$ .

<sup>5</sup> $\overline{z}$  indica il numero complesso coniugato a  $z \in \mathbb{C}$ .

Se  $R \neq I$  l'autospazio  $V_1$  relativo all'autovalore  $\lambda_1 = 1$  ha dimensione uno perché, se avessimo  $\dim V_1 = 2$ , potremmo completare l'insieme  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$  composto da due autovettori ortonormali di  $V_1$  ad una base ortonormale  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$  di  $\mathbb{R}^3$  e, in questa base, la matrice associata alla trasformazione lineare definita da  $R$  sarebbe diagonale. Infatti i suoi coefficienti sono dati da  $\mathbf{x}_i \cdot R\mathbf{x}_j$  e si ha

$$\mathbf{x}_i \cdot R\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j = 0,$$

se  $i = 1, 2, 3, j = 1, 2$  con  $i \neq j$ . Dato che  $\det R = 1$  si avrebbe quindi che  $R = I$ , contro l'ipotesi fatta. Quindi ogni matrice  $R \in SO(3)$  diversa dall'identità ha esattamente un asse di punti fissi (*asse di rotazione*).

Nel caso ii) l'autospazio  $V_{-1}$  di  $\lambda_2 = -1$  ha dimensione 2. Infatti, due autovettori unitari  $\mathbf{x}_1 \in V_1, \mathbf{x}_2 \in V_{-1}$  relativi a  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 = -1$  sono ortogonali poiché

$$\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_1 = R^T R\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_1 = R\mathbf{x}_2 \cdot R\mathbf{x}_1 = -\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_1.$$

Come prima, possiamo completare  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$  ad una base ortonormale di  $\mathbb{R}^3$  e, in questa base, la matrice associata alla trasformazione definita da  $R$  è diagonale e necessariamente della forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Quindi  $R$  rappresenta la rotazione di  $\pi$  attorno all'asse corrispondente alla direzione di  $\mathbf{x}_1$ .

Nel caso iii) gli autovettori relativi a  $\lambda_2 = \mu + i\nu, \lambda_3 = \mu - i\nu$  sono complessi coniugati:

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{a} + i\mathbf{b}, \quad \mathbf{x}_3 = \mathbf{a} - i\mathbf{b},$$

con  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$  entrambi ortogonali ad  $\mathbf{x}_1$ . Infatti, passando ai coniugati, la relazione  $R\mathbf{x}_2 = \lambda_2\mathbf{x}_2$  diventa  $R\mathbf{x}_3 = \lambda_3\mathbf{x}_3$ . Inoltre, da

$$\lambda_2\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_1 = R\mathbf{x}_2 \cdot R\mathbf{x}_1 = R^T R\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_1$$

si ricava

$$(\mu(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}_1) - \nu(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}_1)) + i(\nu(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}_1) + \mu(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}_1)) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}_1) + i(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}_1),$$

cioè, uguagliando parte reale e immaginaria,

$$\begin{cases} (\mu - 1)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}_1) - \nu(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}_1) = 0, \\ \nu(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}_1) - (\mu - 1)(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}_1) = 0. \end{cases}$$

Questo sistema ha solo la soluzione nulla  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}_1 = \mathbf{b} \cdot \mathbf{x}_1 = 0$ , infatti

$$(\mu - 1)^2 + \nu^2 > 0$$

perché  $\nu \neq 0$ . Nella base  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{b}, \mathbf{a}\}$  la matrice associata alla trasformazione definita da  $R$  si scrive nella forma canonica reale

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix},$$

dove

$$\cos \theta = \mu, \quad \sin \theta = \nu.$$

Quindi  $R$  rappresenta la rotazione di  $\theta$  attorno all'asse corrispondente alla direzione di  $\mathbf{x}_1$ .  $\square$

Vale il seguente risultato:

**Proposizione 3.** *Ogni elemento  $g \in \mathcal{G}$  si scrive in modo unico come prodotto di trasformazioni del tipo seguente:*

$$i) \ g_1(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{x} + t\mathbf{u}, t) \quad (\text{moto uniforme con velocità } \mathbf{u})$$

$$ii) \ g_2(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}, t + s) \quad (\text{traslazione dell'origine})$$

$$iii) \ g_3(\mathbf{x}, t) = (G\mathbf{x}, t) \quad (\text{isometria spaziale})$$

con  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3, t, s \in \mathbb{R}, G \in O(3)$ .

*Dimostrazione.* Osserviamo che le trasformazioni della forma  $g_1, g_2, g_3$  stanno in  $\mathcal{G}$ . Consideriamo adesso una generica trasformazione affine  $\Phi$  di  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$  in sé:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ t \end{pmatrix} \xrightarrow{\Phi} A \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ t \end{pmatrix} + \mathbf{b}, \quad (1.15)$$

con

$$A = \begin{bmatrix} G & \mathbf{u} \\ \mathbf{w}^T & a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ s \end{pmatrix}, \quad G \in \mathcal{M}(3, 3), \quad \mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3, \quad a, s \in \mathbb{R}.$$

Mostriamo che se  $\Phi$  è una trasformazione dell'insieme  $\mathcal{G}$  si ha  $\mathbf{w} = \mathbf{0}, a = 1, G \in O(3)$ . Da questo seguirà la tesi. Con la notazione introdotta, l'immagine della trasformazione  $\Phi$  in (1.15) si scrive

$$\begin{pmatrix} G\mathbf{x} + t\mathbf{u} + \mathbf{y} \\ \mathbf{w}^T\mathbf{x} + at + s \end{pmatrix}.$$

L'invarianza degli intervalli di tempo tra due eventi qualunque  $(\mathbf{x}_1, t_1), (\mathbf{x}_2, t_2)$  ci dice che

$$|\mathbf{w}^T(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + a(t_1 - t_2)| = |t_1 - t_2|$$

per ogni  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ . Da questo segue che  $\mathbf{w} = \mathbf{0}, |a| = 1$ . Per conservare anche il verso del tempo si deve scegliere  $a = 1$ . L'invarianza della distanza tra eventi simultanei  $(\mathbf{x}_1, t), (\mathbf{x}_2, t)$  ci dà

$$|G(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)| = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$$

per ogni  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3$ , da cui segue che  $G \in O(3)$ . Infatti, da  $|G\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  segue  $\mathbf{x} \cdot G^T G \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ . La matrice  $S = G^T G$  è simmetrica e si ha

$$\mathbf{x} \cdot S \mathbf{y} = \frac{1}{2}((\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot S(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - \mathbf{x} \cdot S \mathbf{x} - \mathbf{y} \cdot S \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 - |\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{y}|^2) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y},$$

per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ , da cui segue che  $G^T G = S = I$ .  $\square$

Si verifica facilmente che l'insieme  $\mathcal{G}$ , col prodotto di composizione, è un sottogruppo del gruppo delle trasformazioni affini di  $\mathbb{E}^4$ , che chiameremo gruppo di Galileo.<sup>6</sup> Siccome vogliamo conservare anche l'orientazione dello spazio, data dalla scelta del sistema di riferimento, ci restringeremo alle trasformazioni con  $G \in SO(3)$ , cioè alle trasformazioni ortogonali con determinante uguale a 1.

## Principio di relatività di Galileo

Dato un sistema di punti materiali  $P_1, \dots, P_N$ , possiamo estendere in modo naturale l'azione del gruppo di Galileo alle mappe  $t \mapsto \mathbf{x}_i(t), i = 1, \dots, N$ , che rappresentano il moto dei punti. Precisamente si ha:

$$\begin{aligned} g_1 \mathbf{x}_i(t) &= \mathbf{x}_i(t) + t\mathbf{u}, \\ g_2 \mathbf{x}_i(t) &= \mathbf{x}_i(t + s) + \mathbf{y}, \\ g_3 \mathbf{x}_i(t) &= G \mathbf{x}_i(t). \end{aligned}$$

**Definizione 1.** *Diciamo che un sistema di riferimento è inerziale se le equazioni di Newton (1.13) per ogni sistema di punti materiali isolato scritte in questo riferimento sono invarianti rispetto alle trasformazioni del gruppo di Galileo  $\mathcal{G}$ .*

L'invarianza delle equazioni di Newton significa che, data una qualunque soluzione  $t \rightarrow \mathbf{x}(t) = (\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_N(t))$  di queste equazioni, ogni elemento  $g \in \mathcal{G}$  la trasforma in un'altra soluzione delle stesse equazioni.

<sup>6</sup>Ricordiamo che un insieme  $G$  ha la struttura di gruppo se in esso è definito un prodotto associativo, indicato con  $*$ , tale che esista in  $G$  un elemento neutro  $e$  (per cui  $g * e = e * g = g, \forall g \in G$ ) ed ogni elemento  $g$  abbia un inverso  $g^{-1}$  (per cui  $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$ ). Un sottogruppo  $H$  di un gruppo  $G$  è un sottoinsieme di  $G$  che ha anch'esso una struttura di gruppo con lo stesso prodotto di  $G$ .

*Il principio di relatività di Galileo afferma che esistono dei riferimenti inerziali.*

Questo principio porta il nome di Galileo Galilei poiché in un passo di un suo libro egli scrive che, facendo alcuni semplici esperimenti all'interno di una barca che si muove di moto rettilineo uniforme, partendo da una posizione qualunque e andando in una qualunque direzione, si osservano gli stessi effetti che si avrebbero sulla terraferma. Quindi, in particolare, non si può distinguere se la barca sia in movimento oppure no sulla base di questi esperimenti.<sup>7</sup>

---

<sup>7</sup>G. Galilei, dal *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo* (1632). 'Riserratevi con qualche amico nella maggiore stanza che sia sotto coverta di alcun gran navilio, e quivi fate d'aver mosche, farfalle e simili animalletti volanti; siavi anco un gran vaso d'acqua, e dentrovi de' pescetti; sospendasi anco in alto qualche secchiello, che a goccia a goccia vadia versando dell'acqua in un altro vaso di angusta bocca, che sia posto a basso: e stando ferma la nave, osservate diligentemente come quelli animalletti volanti con pari velocità vanno verso tutte le parti della stanza; i pesci si vedranno andar notando indifferentemente per tutti i versi; le stille cadenti entreranno tutte nel vaso sottoposto; e voi, gettando all'amico alcuna cosa, non più gagliardamente la dovrete gettare verso quella parte che verso questa, quando le lontananze sieno eguali; e saltando voi, come si dice, a piè giunti, eguali spazii passerete verso tutte le parti. Osservate che avrete diligentemente tutte queste cose, benché niun dubbio ci sia che mentre il vassello sta fermo non debbano succeder così, se fate muover la nave con quanta si voglia velocità; ché (pur che il moto sia uniforme e non fluttuante in qua e in là) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti, né da alcuno di quelli potrete comprender se la nave cammina o pure sta ferma: voi saltando passerete nel tavolato i medesimi spazii che prima, né, perché la nave si muova velocissimamente, farete maggior salti verso la poppa che verso la prua, benché, nel tempo che voi state in aria, il tavolato sottopostovi scorra verso la parte contraria al vostro salto; e gettando alcuna cosa al compagno, non con più forza bisognerà tirarla, per arrivarlo, se egli sarà verso la prua e voi verso poppa, che se voi fuste situati per l'opposito; le goccioline cadranno come prima nel vaso inferiore, senza caderne pur una verso poppa, benché, mentre la gocciola è per aria, la nave scorra molti palmi; i pesci nella lor acqua non con più fatica noteranno verso la precedente che verso la susseguente parte del vaso, ma con pari agevolezza verranno al cibo posto su qualsivoglia luogo dell'orlo del vaso; e finalmente le farfalle e le mosche continueranno i lor voli indifferentemente verso tutte le parti, né mai accaderà che si riduchino verso la parete che riguarda la poppa, quasi che fussero stracche in tener dietro al veloce corso della nave, dalla quale per lungo tempo, trattenendosi per aria, saranno state separate; e se abbruciando alcuna lagrima d'incenso si farà un poco di fumo, vedrassi ascender in alto ed a guisa di nuvoletta trattenersi, e indifferentemente muoversi non più verso questa che quella parte. E di tutta questa corrispondenza d'effetti ne è cagione l'esser il moto della nave comune a tutte le cose contenute in essa ed all'aria ancora, che per ciò dissi io che si stesse sotto coverta; ché quando si stesse di sopra e nell'aria aperta e non seguace del corso della nave, differenze più e men notabili si vedrebbero in alcuni de' gli effetti nominati: e non è dubbio che il fumo resterebbe in dietro, quanto l'aria stessa; le mosche parimente e le farfalle, impedita dall'aria, non potrebbero seguir il moto della nave, quando da essa per spazio assai notevole si separassero; ma trattenendosi vicine, perché la nave stessa, come di fabbrica anfrattuosa, porta seco parte dell'aria sua prossima, senza intoppo o fatica seguirebbon la nave, e per simil cagione veggiamo tal volta, nel correr la posta, le mosche importune e i tafani seguir i cavalli, volandogli ora in questa ed ora in quella parte del corpo; ma nelle goccioline cadenti pochissima sarebbe la differenza, e ne i salti e ne i proietti gravi, del tutto impercettibile.'

La proprietà di invarianza rispetto al gruppo di Galileo impone delle restrizioni sulla forma delle forze:

- a) *invarianza per traslazioni del tempo*: se  $\mathbf{x}(t)$  è soluzione di (1.13) anche  $\mathbf{x}(t+s)$  lo è, cioè

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i(t+s) = \mathbf{F}_i(\mathbf{x}(t+s), \dot{\mathbf{x}}(t+s), t), \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.16)$$

per ogni  $t, s \in \mathbb{R}$  per cui la relazione di sopra è definita. Ne segue che le forze  $\mathbf{F}_i$  non dipendono da  $t$ :

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}), \quad (1.17)$$

cioè *‘le leggi della natura restano le stesse al passare del tempo’* [2]. Infatti, dati  $t, s$ , possiamo scegliere  $t_1, s_1 \in \mathbb{R}$  in modo che  $t_1 + s_1 = t + s = \tau$  e scrivere

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i(t_1 + s_1) = \mathbf{F}_i(\mathbf{x}(t_1 + s_1), \dot{\mathbf{x}}(t_1 + s_1), t_1), \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.18)$$

Dal confronto tra le equazioni (1.16) e (1.18) si ottiene

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{x}(\tau), \dot{\mathbf{x}}(\tau), t) = \mathbf{F}_i(\mathbf{x}(\tau), \dot{\mathbf{x}}(\tau), t_1),$$

per ogni  $\tau, t, t_1$  per cui tale relazione è definita, e quindi

$$\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial t}(\mathbf{x}(\tau), \dot{\mathbf{x}}(\tau), t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}_i(\mathbf{x}(\tau), \dot{\mathbf{x}}(\tau), t+h) - \mathbf{F}_i(\mathbf{x}(\tau), \dot{\mathbf{x}}(\tau), t)}{h} = \mathbf{0},$$

cioè le forze  $\mathbf{F}_i$  non dipendono dal tempo.

Grazie all'arbitrarietà di  $\mathbf{x}(\tau), \dot{\mathbf{x}}(\tau)$ , che possono essere scelte come condizioni iniziali che definiscono la soluzione  $\mathbf{x}(t)$ , possiamo concludere che vale (1.17).

- b) *invarianza per traslazioni uniformi nello spazio*  $\mathbb{E}^3$ : se  $\mathbf{x}(t)$  è soluzione anche  $\mathbf{x}(t) + t\tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{y}}$ , con  $\tilde{\mathbf{u}} = (\mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}), \tilde{\mathbf{y}} = (\mathbf{y}, \dots, \mathbf{y})$ , lo è per ogni  $\mathbf{u}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$  (lo spazio è omogeneo). Ne segue che<sup>8</sup>

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k, \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_k), \quad (1.19)$$

cioè le forze dipendono solo dalle posizioni e dalle velocità relative.

Per dimostrarlo fissiamo un tempo arbitrario  $\tau$  e usiamo l'invarianza per trasformazioni della forma  $g_2$  con  $\mathbf{y} = -\mathbf{x}_1(\tau)$ ,  $s = 0$ , cioè  $g_2 \mathbf{x}_i(t) = \mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_1(\tau)$ . Poiché

$$\frac{d^2}{dt^2}(g_2 \mathbf{x}_i(t)) = \ddot{\mathbf{x}}_i(t),$$

---

<sup>8</sup>con questa notazione si intende che gli argomenti di  $\mathbf{F}_i$  possono essere tutte le combinazioni  $\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k, \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_k$ , con  $1 \leq j < k \leq N$ .

per  $t = \tau$  si ottiene

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{x}(\tau), \dot{\mathbf{x}}(\tau)) = \mathbf{F}_i(\mathbf{0}, \mathbf{x}_2(\tau) - \mathbf{x}_1(\tau), \dots, \mathbf{x}_N(\tau) - \mathbf{x}_1(\tau), \dot{\mathbf{x}}(\tau)). \quad (1.20)$$

Usiamo adesso l'invarianza per trasformazioni della forma  $g_1$  con  $\mathbf{u} = -\dot{\mathbf{x}}_1(\tau)$ , cioè  $g_1 \mathbf{x}_i(t) = \mathbf{x}_i(t) - t \dot{\mathbf{x}}_1(\tau)$ . Poiché

$$\frac{d^2}{dt^2}(g_1 \mathbf{x}_i(t)) = \ddot{\mathbf{x}}_i(t),$$

per  $t = \tau$ , usando anche la (1.20), si ottiene<sup>9</sup>

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i(\mathbf{x}(\tau), \dot{\mathbf{x}}(\tau)) &= \mathbf{F}_i(\mathbf{0}, \mathbf{x}_2(\tau) - \mathbf{x}_1(\tau), \dots, \mathbf{x}_N(\tau) - \mathbf{x}_1(\tau), \\ &\quad \mathbf{0}, \dot{\mathbf{x}}_2(\tau) - \dot{\mathbf{x}}_1(\tau), \dots, \dot{\mathbf{x}}_N(\tau) - \dot{\mathbf{x}}_1(\tau)). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Grazie all'arbitrarietà delle condizioni iniziali  $\mathbf{x}(\tau), \dot{\mathbf{x}}(\tau)$  possiamo concludere che<sup>10</sup>

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_1, \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_1), \quad (1.22)$$

cioè le forze  $\mathbf{F}_i$  dipendono solo dalle posizioni e velocità relative a  $P_1$  dei punti  $P_2, \dots, P_N$ .

Osserviamo anche che (1.22) è equivalente a (1.19), cioè possiamo scrivere le  $\mathbf{F}_i$  nella forma (1.22) se e solo se le possiamo scrivere nella forma (1.19), infatti

$$\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k = (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_1) - (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_1), \quad \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_k = (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_1) - (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_1).$$

- c) invarianza per rotazioni nello spazio  $\mathbb{E}^3$ : se  $\mathbf{x}(t) = (\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_N(t))$  è soluzione anche  $(G\mathbf{x}_1(t), \dots, G\mathbf{x}_N(t))$  lo è, per ogni  $G \in SO(3)$  (lo spazio è isotropo). Ne segue che

$$\mathbf{F}_i(G(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k), G(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_k)) = G\mathbf{F}_i(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k, \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_k). \quad (1.23)$$

---

<sup>9</sup>infatti si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i(\mathbf{x}(\tau), \dot{\mathbf{x}}(\tau)) &= \mathbf{F}_i(\mathbf{x}_1(\tau) - \tau \dot{\mathbf{x}}_1(\tau), \mathbf{x}_2(\tau) - \tau \dot{\mathbf{x}}_1(\tau), \dots, \mathbf{x}_N(\tau) - \tau \dot{\mathbf{x}}_1(\tau), \\ &\quad \mathbf{0}, \dot{\mathbf{x}}_2(\tau) - \dot{\mathbf{x}}_1(\tau), \dots, \dot{\mathbf{x}}_N(\tau) - \dot{\mathbf{x}}_1(\tau)). \end{aligned}$$

Inoltre

$$\mathbf{x}_i(\tau) - \tau \dot{\mathbf{x}}_1(\tau) - (\mathbf{x}_j(\tau) - \tau \dot{\mathbf{x}}_1(\tau)) = \mathbf{x}_i(\tau) - \mathbf{x}_j(\tau).$$

<sup>10</sup>in modo analogo a prima, qui intendiamo che gli argomenti di  $\mathbf{F}_i$  possono essere tutte le combinazioni  $\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_1, \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_1$ , con  $j = 2, \dots, N$ .

La (1.23) segue applicando  $G$  ai due membri dell'equazione di Newton:

$$Gm_i\ddot{\mathbf{x}}_i = G\mathbf{F}_i(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k, \dot{\mathbf{x}}_j - \dot{\mathbf{x}}_k),$$

usando la linearità di  $G$ :

$$Gm_i\ddot{\mathbf{x}}_i = m_iG\ddot{\mathbf{x}}_i,$$

e osservando che l'invarianza per trasformazioni della forma  $g_3$  ci dà

$$m_iG\ddot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}_i(G(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k), G(\dot{\mathbf{x}}_j - \dot{\mathbf{x}}_k)).$$

**Osservazione 2.** *In particolare, se il sistema consiste di un solo punto, in ogni sistema di riferimento inerziale la forza che agisce sul punto è nulla e quindi il suo moto è rettilineo uniforme. Infatti per a), b) la forza non dipende da  $t, \mathbf{x}, \mathbf{v}$ , quindi è costante; inoltre per c) essa è invariante per rotazioni, quindi è nulla.*

## 1.5 Sistemi meccanici

**Definizione 2.** *Consideriamo un insieme di  $N$  punti materiali,  $P_i, i = 1, \dots, N$ , di masse  $m_i$ , su cui agiscono delle forze  $\vec{\mathbf{F}}_i$  assegnate a priori in un sistema di riferimento  $\Sigma$ . Diciamo che questo è un **sistema meccanico classico** (discreto, non vincolato) se il moto dei punti soddisfa le equazioni di Newton (1.13). Se nel riferimento scelto le equazioni di Newton sono invarianti per l'azione del gruppo  $\mathcal{G}$  (cioè il riferimento considerato è inerziale), si parla di **sistema meccanico galileiano**.*

La dimensione dello spazio vettoriale in cui si possono muovere i punti del sistema, che nel caso di  $N$  punti è  $3N$ , si chiama **numero di gradi di libertà** del sistema.

Per i sistemi meccanici che studieremo le equazioni del moto potranno non essere invarianti per le trasformazioni di Galileo. L'esempio più semplice è quello della caduta di un grave, cioè il moto di un punto materiale di massa  $m$  soggetto alla forza di gravità  $-mg\hat{\mathbf{e}}_3$  in un riferimento  $\Sigma = O \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3$ . È evidente la mancanza di invarianza per rotazione dell'equazione del moto, che si scrive:

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -mg\mathbf{e}_3.$$

In questo caso la direzione della gravità è privilegiata. Osserviamo che il sistema meccanico considerato non è isolato in quanto risente della forza di gravità, esterna al sistema.

## 1.6 Esercizi

**Esercizio 3.** Siano  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}^3$  con  $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$ . Dato  $\vec{a} \in \text{span}(\vec{u}, \vec{v})$ , trovare i coefficienti  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tali che

$$\vec{a} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}.$$

Trovare inoltre i vettori  $\lambda \vec{u}$  e  $\mu \vec{v}$  col metodo grafico.

**Esercizio 4.** Siano  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}^3$  con  $\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} \neq 0$ . Dato  $\vec{a} \in \mathbb{V}^3$ , trovare i coefficienti  $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$  tali che

$$\vec{a} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} + \nu \vec{w}.$$

Trovare inoltre i vettori  $\lambda \vec{u}$ ,  $\mu \vec{v}$  e  $\nu \vec{w}$  col metodo grafico.

**Esercizio 5.** Mostrare che per ogni scelta di  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{V}^3$  vale la relazione

$$(\vec{a} \cdot \vec{c} \times \vec{d}) \vec{b} + (\vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b}) \vec{d} = (\vec{b} \cdot \vec{c} \times \vec{d}) \vec{a} + (\vec{d} \cdot \vec{a} \times \vec{b}) \vec{c}.$$



# Capitolo 2

## Dinamica di un punto materiale libero

Studiamo il moto di un punto materiale libero. Introduciamo inoltre i problemi integrabili secondo Liouville e, tra essi, i moti unidimensionali.

### 2.1 Quantità dinamiche per un punto materiale

Consideriamo un punto materiale  $P$  di massa  $m$  sul quale agisce una forza  $\vec{F}$  nel sistema di riferimento  $\Sigma = O \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$ . Siano  $\vec{x}, \vec{v}, \vec{a}$  la posizione, la velocità e l'accelerazione di  $P$  relative a  $\Sigma$ . Denoteremo con  $\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{a}$  (senza il simbolo '→') i vettori delle coordinate in  $\Sigma$  di queste quantità.

Introduciamo le seguenti definizioni:

QUANTITÀ DI MOTO (o MOMENTO LINEARE)

$$\vec{p} = m\vec{v},$$

MOMENTO ANGOLARE RISPETTO A UN POLO  $Q \in \mathbb{E}^3$

$$\vec{M}_Q = (P - Q) \times m\vec{v},$$

ENERGIA CINETICA<sup>1</sup>

$$T = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2,$$

MOMENTO DELLA FORZA  $\vec{F}$  RISPETTO A UN POLO  $Q \in \mathbb{E}^3$

$$\vec{N}_Q = (P - Q) \times \vec{F},$$

---

<sup>1</sup>la quantità  $m|\vec{v}|^2$  è stata introdotta da Leibniz con il nome di *vis viva*.

POTENZA DELLA FORZA  $\vec{F}$

$$\Pi = \vec{F} \cdot \vec{v} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v},$$

Osserviamo che il valore della potenza è lo stesso in qualunque base ortonormale si rappresentino  $\vec{F}$ ,  $\vec{v}$ .

ENERGIA POTENZIALE

Si dice che un campo di forze posizionale  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  è **conservativo** se ammette un potenziale, cioè se esiste una funzione scalare  $U(\mathbf{x})$  tale che<sup>2</sup>

$$\nabla U = \mathbf{F}.$$

In tal caso la funzione

$$V = -U$$

si chiama **energia potenziale** del campo di forze e si ha

$$\mathbf{F} = -\nabla V,$$

ENERGIA TOTALE

Se la forza  $\mathbf{F}$  è conservativa, con energia potenziale  $V$ , possiamo definire l'**energia totale** del sistema come

$$E = T + V.$$

## Esempi

Forze conservative:

1)  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -mg\mathbf{e}_3$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  (forza peso)

$$V(\mathbf{x}) = mg\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_3, \quad \nabla V(\mathbf{x}) = mg\mathbf{e}_3 = -\mathbf{F}(\mathbf{x}).$$

2)  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -k\mathbf{x}$ ,  $k > 0$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  (forza elastica centrale)

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}k|\mathbf{x}|^2, \quad \nabla V(\mathbf{x}) = k\mathbf{x} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}).$$

3)  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho)\frac{\mathbf{x}}{\rho}$ ,  $\rho = |\mathbf{x}|$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  (forza centrale a simmetria sferica)

$$V(\mathbf{x}) = \mathcal{V}(\rho(\mathbf{x})), \quad \mathcal{V}(\rho) = -\int f(\rho) d\rho,$$

$$\nabla V(\mathbf{x}) = -f(\rho)\nabla\rho = -f(\rho)\frac{\mathbf{x}}{\rho} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}).$$

---

<sup>2</sup>data una funzione  $f(\mathbf{x})$ , con il simbolo  $\nabla f$  indicheremo il vettore colonna delle derivate parziali di  $f$  rispetto ad  $\mathbf{x}$ , cioè  $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}})^T$ .

Forza non conservativa:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (x^2 + y^2, xy, 0).$$

Ragioniamo per assurdo. Se esistesse una funzione  $V(\mathbf{x})$  tale che  $-\nabla V = \mathbf{F}$ , si avrebbe in particolare

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = x^2 + y^2, \quad -\frac{\partial V}{\partial y} = xy.$$

Poiché le funzioni  $x^2 + y^2$  e  $xy$  sono polinomiali, quindi sicuramente di classe  $C^1$ , possiamo applicare il teorema di Schwartz e notare che nelle derivate seconde miste di  $V(\mathbf{x})$  l'ordine di derivazione non conta. Quindi si avrebbe

$$y = -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} = 2y,$$

che è una contraddizione.

## 2.2 Equazioni di bilancio e leggi di conservazione

Consideriamo un punto materiale  $P$  di massa  $m$  con coordinate  $\mathbf{x}$ , su cui agisca una forza  $\mathbf{F}$ .

**Proposizione 4.** *Sia  $\mathbf{x}(t)$  una qualunque soluzione dell'equazione di Newton  $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ . Allora, lungo questa soluzione<sup>3</sup> valgono le relazioni*

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}, \tag{2.1}$$

e, per ogni punto  $Q \in \mathbb{E}^3$ ,

$$\dot{\mathbf{M}}_Q = \mathbf{N}_Q - m\mathbf{v}_Q \times \mathbf{v}, \tag{2.2}$$

dove  $\mathbf{v}_Q$  è la velocità del polo  $Q$ .

*Dimostrazione.* Basta calcolare la derivata totale di  $\mathbf{p}$  e di  $\mathbf{M}_Q$ , cioè la derivata temporale lungo una qualunque soluzione  $\mathbf{x}(t)$  dell'equazione di Newton:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} &= m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}, \\ \dot{\mathbf{M}}_Q &= (\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_Q) \times m\ddot{\mathbf{x}} + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_Q) \times m\ddot{\mathbf{x}} = -m\dot{\mathbf{x}}_Q \times \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{N}_Q. \end{aligned}$$

□

---

<sup>3</sup>dire che queste relazioni valgono lungo una soluzione  $\mathbf{x}(t)$  dell'equazione di Newton significa che tali relazioni sono soddisfatte sostituendo le funzioni  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{x}}(t)$ ,  $\ddot{\mathbf{x}}(t)$  al posto di  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{a}$ .

**Proposizione 5.** (teorema dell'energia cinetica) Sia  $\mathbf{x}(t)$  una qualunque soluzione dell'equazione di Newton  $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ . Allora, lungo questa soluzione vale la relazione

$$\dot{T} = \Pi.$$

*Dimostrazione.*

$$\Pi = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{x}} = m\ddot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} = \frac{m}{2} \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}) = \dot{T}.$$

□

**Definizione 3.** Si dice che una funzione  $I(\mathbf{x}, t)$  è un **integrale primo** di un'equazione differenziale  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ , con  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k, k > 0$ , se il suo valore è costante lungo una qualunque soluzione  $\mathbf{x}(t)$  di questa equazione.

Questo significa che, se  $I(\mathbf{x}, t)$  è un integrale primo e  $\mathbf{x}(t)$  è una qualunque soluzione di  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ , si ha

$$\frac{d}{dt}I(\mathbf{x}(t), t) = 0$$

e quindi, integrando a partire dal tempo iniziale  $t_0$ , si ottiene la legge di conservazione

$$I(\mathbf{x}(t), t) = I(\mathbf{x}(t_0), t_0).$$

I valori dell'integrale primo  $I$  saranno in generale diversi in corrispondenza di soluzioni  $\mathbf{x}(t)$  diverse.

**Esercizio 6.** Trovare un integrale primo dell'equazione differenziale

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

**Proposizione 6.** Valgono le seguenti proprietà:

- 1) se la componente di  $\mathbf{F}$  nella direzione  $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$  è nulla allora  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}$  è un integrale primo;
- 2) se il momento della forza  $\mathbf{F}$  rispetto ad un polo  $Q$  in quiete (nel riferimento in cui si studia il moto) ha componente nulla nella direzione  $\mathbf{e}$  allora  $\mathbf{M}_Q \cdot \mathbf{e}$  è un integrale primo.

*Dimostrazione.* Basta moltiplicare scalarmente per  $\mathbf{e}$  le relazioni (2.1), (2.2), tenendo conto che in quest'ultima si ha  $\mathbf{v}_Q = \mathbf{0}$ .

□

Ad esempio, per un punto materiale  $P$  soggetto alla forza peso  $\mathbf{F} = -mge_3$  si conservano  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{M}_Q \cdot \mathbf{e}_3$  rispetto ad ogni polo fisso  $Q$ .

Dato un versore  $\hat{\mathbf{e}} \in \mathbb{V}^3$ , la quantità  $\vec{\mathbf{M}}_Q \cdot \hat{\mathbf{e}}$  si chiama **momento angolare assiale** relativo alla retta  $Q\hat{\mathbf{e}} = \{Q + \lambda\hat{\mathbf{e}}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ , passante per  $Q$  e avente la direzione di  $\hat{\mathbf{e}}$ . Il suo valore non cambia scegliendo come polo un punto qualunque su tale retta, infatti, se  $Q' \in Q\hat{\mathbf{e}}$ , dalla relazione

$$\vec{\mathbf{M}}_Q = \vec{\mathbf{M}}_{Q'} + (Q - Q') \times m\vec{\mathbf{v}}$$

segue che

$$\vec{\mathbf{M}}_Q \cdot \hat{\mathbf{e}} = \vec{\mathbf{M}}_{Q'} \cdot \hat{\mathbf{e}}$$

poiché  $(Q - Q') \times m\vec{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{e}} = 0$ .

**Proposizione 7. (conservazione dell'energia)** *Se il campo di forze  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  è conservativo, con energia potenziale  $V(\mathbf{x})$ , allora l'energia totale  $E = T + V$  è un integrale primo.*

*Dimostrazione.*

$$\dot{T} = \Pi = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{x}} = -\nabla V \cdot \dot{\mathbf{x}} = -\dot{V} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(T + V) = 0.$$

□

## 2.3 Problemi integrabili

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (2.3)$$

dove  $\mathbf{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  è un campo vettoriale di classe  $C^1$  definito su un aperto  $U \in \mathbb{R}^n$ , con  $n \geq 1$ , e  $\mathbf{x}_0 \in U$  è la condizione iniziale al tempo  $t = 0$ .

Per il teorema di Cauchy-Lipschitz una soluzione locale  $\mathbf{x}(t)$  di (2.3) esiste ed è unica, però in generale non abbiamo nessuna informazione sulla sua espressione. In alcuni casi, molto particolari, la soluzione  $\mathbf{x}(t)$  di (2.3) si riesce a trovare esplicitamente. Ad esempio, se  $n = 1$  ed

$$f(x) = ax,$$

con  $a \neq 0$  costante, la soluzione è data da

$$x(t) = e^{at}x_0,$$

dove  $x_0 \in \mathbb{R}$  è la condizione iniziale.

Ci interessa adesso studiare una situazione intermedia, in cui la soluzione  $\mathbf{x}(t)$  si può scrivere in forma implicita e precisamente *a meno di inversioni e quadrature*<sup>4</sup> per qualunque valore della condizione iniziale  $\mathbf{x}_0$ . In questo caso diciamo che il problema (2.3) è **integrabile** secondo Liouville, o semplicemente che è integrabile. Un esempio di problema integrabile è descritto di seguito.

## Equazioni differenziali a variabili separabili

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.4)$$

dove  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione di classe  $C^1$  definita su un intervallo aperto  $I \subset \mathbb{R}$  e  $x_0 \in \mathbb{R}$  è la condizione iniziale. I valori di  $x_0$  tali che  $f(x_0) = 0$  danno luogo a soluzioni stazionarie  $x(t) = x_0$ . Se la condizione iniziale  $x_0$  non annulla  $f$  allora, per l'unicità della soluzione  $x(t)$  di (2.4), si avrà  $f(x(t)) \neq 0$  in tutto l'intervallo massimale di definizione di tale soluzione. Per risolvere il problema posso dividere l'equazione differenziale per  $f(x(t))$  e integrare nella variabile temporale tra 0 e  $t$ . Usando il cambiamento di variabili nell'integrazione ottengo

$$t = \int_0^t \frac{\dot{x}(t')}{f(x(t'))} dt' = \int_{x_0}^x \frac{1}{f(x')} dx' =: G(x). \quad (2.5)$$

Osserviamo che la funzione  $\frac{1}{f(x)}$  è di classe  $C^1$ , quindi la sua primitiva  $G(x)$  esiste, anche se non è detto che si riesca a calcolare in termini di funzioni elementari, come ad esempio nel caso  $f(x) = \frac{e^x}{x}$ . Inoltre, siccome  $f$  non può cambiare segno nell'intervallo considerato, la funzione  $G(x)$  è strettamente monotona e quindi invertibile, anche se non è detto che si riesca a calcolarne esplicitamente l'inversa, come ad esempio nel caso  $G(x) = xe^x$ . Possiamo quindi concludere che il problema (2.4) è integrabile secondo Liouville.

**Osservazione 3.** *Può succedere che il moto diventi illimitato in tempo finito. Se  $f$  non è lipschitziana,<sup>5</sup> può anche succedere che la soluzione non sia unica.*

<sup>4</sup>cioè a meno di invertire esplicitamente delle funzioni e a meno di calcolare delle primitive in termini di funzioni elementari. Si richiede comunque l'esistenza di tali funzioni inverse e di tali primitive.

<sup>5</sup> $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  si dice lipschitziana su un aperto  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  se esiste una  $L > 0$  tale che  $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq L|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$ .

**Esercizio 7.** *Studiare le soluzioni dei problemi di Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = \sqrt{|x|} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

con  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

## 2.4 Moti unidimensionali

In questa sezione consideriamo il problema di Cauchy unidimensionale

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t), \\ x(0) = x_0, \\ \dot{x}(0) = v_0. \end{cases} \quad (2.6)$$

dove  $n = 1$ ,  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0, v_0 \in \mathbb{R}$ . Nel seguito ci riferiremo al sistema (2.6) parlando di **moto unidimensionale**.

Nel caso di un moto unidimensionale, se la forza  $F$  è continua e puramente posizionale allora è conservativa e possiamo determinare un'energia potenziale, cioè una funzione  $V(x)$  con  $-V'(x) = F(x)$ . In questo caso il problema di Cauchy (2.6) si scrive

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -V'(x), \\ x(0) = x_0, \\ \dot{x}(0) = v_0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Assumiamo che  $F$  sia  $C^1$ , cosicché la soluzione di (2.7) è unica.

**Osservazione 4.** *Le soluzioni dell'equazione differenziale*

$$m\ddot{x} = -V'(x) \quad (2.8)$$

sono invarianti per traslazioni e riflessioni temporali, cioè se  $x(t)$  è una soluzione di (2.8), allora anche  $y(t) = x(t - \tau)$  con  $\tau \in \mathbb{R}$  e  $z(t) = x(-t)$  risolvono la stessa equazione differenziale.

**Proposizione 8.** *Il problema (2.7) è integrabile secondo Liouville.*

*Dimostrazione.* L'energia totale

$$E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)$$

è un integrale primo di (2.8). Posto  $E_0 = E(x_0, v_0)$  scriviamo la conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) + V(x(t)) = E_0 \quad (2.9)$$

lungo la soluzioni  $x(t)$  di (2.7). Dalla (2.9) si vede che i valori ammissibili di  $x(t)$  soddisfano necessariamente la condizione

$$E_0 - V(x) \geq 0.$$

I valori di  $x$  tali che

$$E_0 - V(x) = 0, \quad V'(x) \neq 0 \quad (2.10)$$

si chiamano **punti di inversione** del moto. I valori di  $x$  tali che

$$E_0 - V(x) = 0, \quad V'(x) = 0 \quad (2.11)$$

si chiamano **configurazioni di equilibrio**, o più semplicemente **equilibri**. Supponiamo che ci sia un numero finito (diverso da zero) di punti di inversione. Possiamo trovare un numero finito di intervalli disgiunti di valori di  $x$  in cui si può svolgere il moto. Questi intervalli possono essere sia limitati che illimitati.

Dalla (2.9) ricaviamo che la soluzione di (2.7) soddisfa

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2(E_0 - V(x))}{m}}. \quad (2.12)$$

Distinguiamo 3 casi in base alle condizioni iniziali di (2.7):

$$\text{i) } v_0 > 0, \quad \text{ii) } v_0 < 0, \quad \text{iii) } v_0 = 0.$$

Nel caso i) scegliamo il segno positivo in (2.12) e consideriamo il problema di Cauchy

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2(E_0 - V(x))}{m}}, \quad x(0) = x_0. \quad (2.13)$$

Nel caso ii) scegliamo il segno negativo e consideriamo

$$\dot{x} = -\sqrt{\frac{2(E_0 - V(x))}{m}}, \quad x(0) = x_0. \quad (2.14)$$

Infine, nel caso iii)  $x_0$  è un punto di inversione oppure un equilibrio. Se  $x_0$  è un punto di inversione si ha  $V'(x_0) \neq 0$  e scegliamo in (2.12) il segno della forza  $F(x_0) = -V'(x_0)$ . Infatti, se  $F(x_0) > 0$  allora  $\ddot{x}(0) > 0$ , quindi  $\dot{x}$  deve essere crescente, almeno inizialmente. Analogamente, se  $F(x_0) < 0$  allora  $\dot{x}$  deve essere inizialmente decrescente. Se  $x_0$  è un equilibrio si ha  $F(x_0) = -V'(x_0) = 0$  e  $\dot{x}_0 = 0$ , e la funzione costante  $x(t) = x_0$  è la soluzione di (2.7). □

Diciamo che un valore  $E_0$  dell'energia  $E$  è **critico** se nell'insieme  $\{(x, v) : E(x, v) = E_0\}$  c'è un punto critico di  $E$ , cioè un punto  $(x, v) = (x_c, 0)$  tale che  $V'(x_c) = 0$ . In caso contrario diciamo che  $E_0$  è un valore **regolare**.

**Osservazione 5.** *Nel caso iii) della dimostrazione della Proposizione 8  $x_0$  è un punto di inversione oppure un equilibrio. Se  $E_0$  è un valore regolare di  $E$  il caso dell'equilibrio è escluso, e la funzione  $\sqrt{E_0 - V(x)}$  non è lipschitziana in nessun intorno (destra o sinistra) di  $x_0$  dove  $E_0 - V(x) \geq 0$ , cioè dove è possibile il moto.<sup>6</sup> In questo caso si perde l'unicità delle soluzioni dei problemi di Cauchy (2.13), (2.14), che hanno anche la soluzione costante  $x(t) = x_0$ . Quest'ultima corrisponde all'unica soluzione di (2.7) se e solo se  $E_0$  è un valore critico, cioè se  $V'(x_0) = 0$ .*

## Moti per valori regolari di $E$

Consideriamo due punti di inversione consecutivi  $x_{\min}$ ,  $x_{\max}$ , con  $x_{\min} < x_{\max}$ , che corrispondono a un valore regolare  $E_0$  dell'energia e sono tali che il moto si possa svolgere all'interno dell'intervallo  $[x_{\min}, x_{\max}]$ , cioè

$$\begin{aligned} E_0 - V(x_{\min}) &= E_0 - V(x_{\max}) = 0, \\ E_0 - V(x) &> 0 \text{ se } x \in (x_{\min}, x_{\max}), \\ V'(x_{\min}) &< 0 < V'(x_{\max}). \end{aligned} \quad (2.15)$$

**Definizione 4.** *Diciamo che una soluzione  $x(t)$  di (2.7) è un moto periodico di periodo  $T > 0$  se*

$$x(t + T) = x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

e per nessun  $T'$ , con  $0 < T' < T$ , si ha  $x(t + T') = x(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

**Proposizione 9.** *Se valgono le relazioni (2.15), con  $E_0 = E(x_0, v_0)$ , la soluzione  $x(t)$  di (2.7) dà luogo a un moto periodico con periodo*

$$T = 2 \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \sqrt{\frac{m}{2(E_0 - V(x'))}} dx'. \quad (2.16)$$

*Dimostrazione.* Consideriamo la soluzione  $x(t)$  del problema di Cauchy (2.7) con  $x_0 = x_{\min}$  e  $v_0 = 0$  (perché  $x_{\min}$  è un punto di inversione). Osserviamo che  $x(t)$  soddisfa l'equazione (2.12) con la scelta positiva del segno poiché  $-V'(x_{\min}) > 0$ . Mostriamo che  $x(t)$  è definita su  $[0, T/2]$ , dove  $T$  è dato dalla relazione (2.16) e corrisponde al doppio del tempo necessario per andare da  $x_{\min}$  a  $x_{\max}$ . Per

<sup>6</sup>Questa affermazione si giustifica scrivendo lo sviluppo di Taylor di  $E_0 - V(x)$  in  $x = x_0$ :

$$E_0 - V(x) = \underbrace{E_0 - V(x_0)}_{=0} - V'(x_0)(x - x_0) + O(|x - x_0|^2).$$

farlo dobbiamo dimostrare che questo tempo è finito. Consideriamo lo sviluppo di Taylor di  $E_0 - V(x)$  centrato in  $x_{\min}$  per  $x \in [x_{\min}, \bar{x}]$ , con  $x_{\min} \leq \bar{x} < x_{\max}$ :

$$E_0 - V(x) = -V'(x_{\min})(x - x_{\min}) - \frac{1}{2}V''(x_{\min})(x - x_{\min})^2 + o(|x - x_{\min}|^2).$$

Il tempo impiegato dal punto  $P$  per arrivare a  $\bar{x}$  partendo da  $x_{\min}$  è dato dall'integrale

$$\int_{x_{\min}}^{\bar{x}} \sqrt{\frac{m}{2(E_0 - V(x'))}} dx',$$

che è finito perché

$$\int_{x_{\min}}^{\bar{x}} \frac{1}{\sqrt{|x - x_{\min}|}} dx < +\infty.$$

In modo analogo si dimostra che il tempo impiegato da  $P$  per andare da  $\bar{x}$  a  $x_{\max}$  è finito.

Osserviamo che la funzione

$$y(t) = x(T - t),$$

definita per  $t \in [T/2, T]$ , è ancora soluzione di (2.8) e si ha

$$y(T/2) = x(T/2) = x_{\max}, \quad \dot{y}(T/2) = -\dot{x}(T/2) = 0. \quad (2.17)$$

Da questo e dall'unicità della soluzione del problema di Cauchy per (2.8), con condizioni iniziali date da (2.17) al tempo  $t = T/2$ , segue che

$$y(t) = x(t) \quad (2.18)$$

nell'intervallo in cui queste soluzioni sono definite, e in particolare  $x(t)$  risulta definita sull'intervallo  $[0, T]$ . Osserviamo che anche la funzione

$$z(t) = x(t + T), \quad (2.19)$$

definita per  $t \in [-T, 0]$ , è soluzione di (2.8). Dalle relazioni (2.19), (2.18) segue che

$$z(0) = x(T) = x_{\min} = x(0), \quad \dot{z}(0) = \dot{x}(T) = 0 = \dot{x}(0). \quad (2.20)$$

Quindi, usando l'unicità della soluzione del problema di Cauchy per (2.8) con condizioni iniziali date da (2.20) al tempo  $t = 0$  otteniamo che

$$z(t) = x(t)$$

nell'intervallo in cui queste soluzioni sono definite, e in particolare  $x(t)$  risulta definita sull'intervallo  $[-T, T]$ . Procedendo in modo simile, otteniamo che

$$x(t + T) = x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

cioè il moto è periodico di periodo  $T$ .

□

## Moti per valori critici di $E$

Assumiamo adesso che  $E_0$  sia un valore critico dell'energia, corrispondente a un punto critico  $x_c$  di  $V(x)$ , e che il moto sia possibile in un intervallo sinistro  $[x_0, x_c]$  di  $x_c$ , dove  $x_0$  è un punto di inversione. Poiché  $V'(x_c) = 0$ , lo sviluppo di Taylor di  $E_0 - V(x)$  centrato in  $x_c$  è

$$E_0 - V(x) = -\frac{1}{2}V''(x_c)(x - x_c)^2 + o(|x - x_c|^2).$$

Il tempo impiegato dal punto  $P$  per arrivare a  $x_c$  partendo da  $x_0$  è dato dall'integrale

$$\int_{x_0}^{x_c} \sqrt{\frac{m}{2(E_0 - V(x'))}} dx',$$

che è infinito perché

$$\int_{x_0}^{x_c} \frac{1}{|x - x_c|} dx = +\infty.$$

Osserviamo anche che il problema di Cauchy (2.7) con  $x_0 = x_c, v_0 = 0$  ammette la soluzione di equilibrio  $x(t) = x_c$ .

Il caso in cui il moto sia possibile in un intervallo destro  $[x_c, x_0]$  di  $x_c$  si tratta in modo analogo.

## Ritratto di fase

La funzione  $t \mapsto x(t)$  è soluzione di (2.7) se e solo se la curva piana  $t \mapsto (x(t), v(t))$  è soluzione del sistema di equazioni differenziali del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\frac{1}{m}V'(x) \end{cases} \quad (2.21)$$

con le condizioni iniziali

$$x(0) = x_0, \quad v(0) = v_0. \quad (2.22)$$

Il **ritratto di fase** di un moto unidimensionale conservativo è un disegno nel piano della fasi, con coordinate  $(x, v)$ , delle traiettorie delle soluzioni di (2.21). Per questo sistema abbiamo l'integrale primo dell'energia

$$E(x, v) = \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$$

per cui le traiettorie delle sue soluzioni giacciono sulle curve di livello

$$\mathcal{C}_E = \{(x, v) : E(x, v) = E_0\}$$

al variare di  $E_0$  in  $\mathbb{R}$ . Nel disegnare il ritratto di fase si scelgono dei valori dei livelli  $E_0$  che corrispondono a curve qualitativamente diverse.

Le traiettorie delle soluzioni di (2.22) non si possono intersecare nel piano con coordinate  $(x, v)$ , infatti vale il seguente risultato:

**Proposizione 10.** *Siano  $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)$  due soluzioni di*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, n \geq 1, \quad (2.23)$$

con  $\mathbf{f}$  di classe  $C^1$  su un aperto  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ , tali che le loro traiettorie si intersecano in un punto, cioè esistono  $t_1, t_2$  tali che  $\mathbf{x}_1(t_1) = \mathbf{x}_2(t_2)$ . Allora queste traiettorie coincidono.

*Dimostrazione.* Definisco  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}_2(t - t_1 + t_2)$ . La curva  $t \mapsto \mathbf{y}(t)$  è ancora una soluzione di (2.23) e la sua traiettoria coincide con quella di  $\mathbf{x}_2$ . Inoltre si ha

$$\mathbf{y}(t_1) = \mathbf{x}_2(t_2) = \mathbf{x}_1(t_1),$$

quindi le soluzioni  $\mathbf{y}(t)$  e  $\mathbf{x}_1(t)$  coincidono, e in particolare coincidono le loro traiettorie. □

**Corollario 1.** *In un moto per un valore critico di  $E$ , partendo da un punto  $(x, \dot{x})$  diverso da un equilibrio  $(x_0, 0)$ , non si può mai raggiungere tale equilibrio se non asintoticamente per  $t \rightarrow \pm\infty$ .*

I cambiamenti qualitativi nella topologia delle curve di livello possono avvenire solo attraversando i livelli critici di  $E$ , per cui  $E(x, v) = E(x_0, 0)$  con  $V'(x_0) = 0$ . Quindi nel ritratto di fase dovremo tracciare sicuramente le curve che corrispondono a tali livelli.

**Esempio 1.** Tracciamo il ritratto di fase del moto unidimensionale con energia potenziale

$$V(x) = -x^3 + 2x - 4. \quad (2.24)$$

I punti critici di  $V$  sono  $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ . Indichiamo con  $h_1 = V(x_1) \approx -2.9113$ ,  $h_2 = V(x_2) \approx -5.0887$  i corrispondenti valori critici dell'energia

$$E(x, v) = \frac{1}{2}mv^2 + V(x).$$

Nella Figura 2.1 disegniamo il grafico dell'energia potenziale  $V$  (sopra) e alcune curve di livello di  $E$  (sotto). Oltre ai livelli critici, abbiamo scelto dei livelli intermedi dell'energia. I valori considerati sono

$$(E_1, E_2, E_3, E_4, E_5) = (-6, h_2, -4, h_1, -2.5).$$

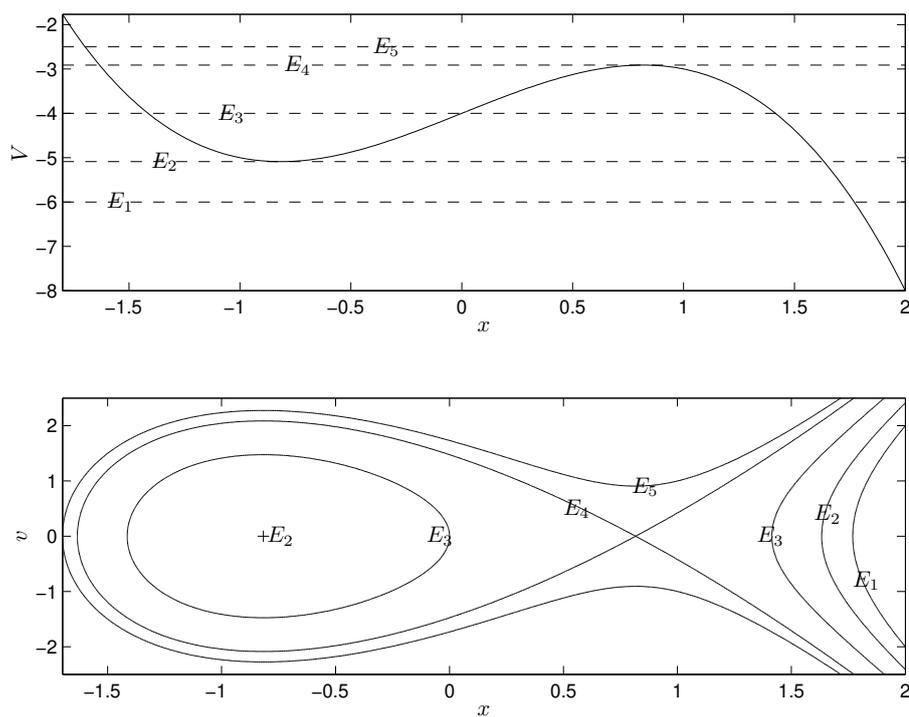


Figura 2.1: Sopra: grafico dell'energia potenziale in (2.24). Sotto: curve di livello dell'energia totale  $E(x, v)$ .

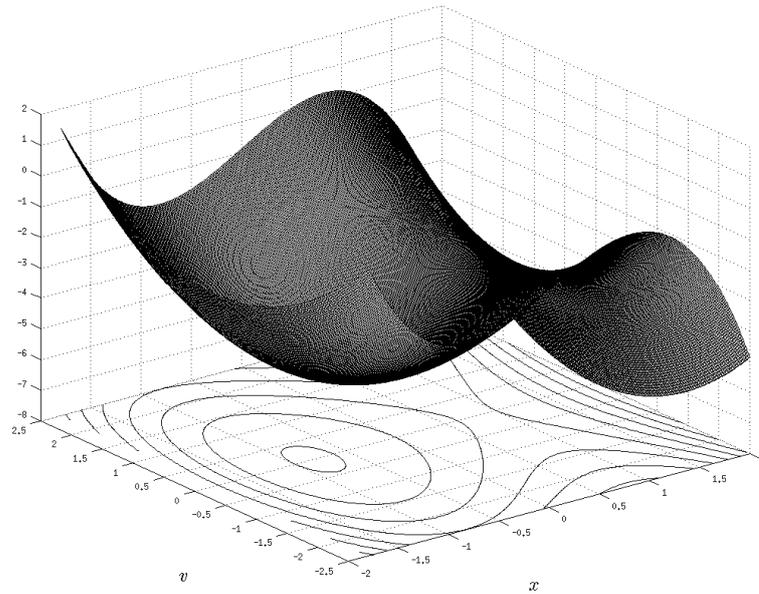


Figura 2.2: Grafico dall'energia  $E(x, v)$  insieme ad alcune curve di livello.

Ai minimi locali di  $V(x)$  corrispondono minimi locali di  $E(x, v)$  e ai massimi locali di  $V(x)$  corrispondono punti di sella di  $E(x, v)$ .

Nella Figura 2.2 tracciamo il grafico della superficie definita dall'energia  $E(x, v)$  insieme ad alcune sue curve di livello nel piano  $(x, v)$ .

**Osservazione 6.** *Vedremo che alcuni problemi della Meccanica saranno riconducibili allo studio di moti unidimensionali in seguito a un procedimento di riduzione del numero di gradi di libertà.*

# Capitolo 3

## Moti centrali

Descriviamo le proprietà delle forze centrali a simmetria sferica e mostriamo come queste diano luogo a problemi integrabili. Trattiamo inoltre in dettaglio il caso particolare del problema di Keplero.

**Definizione 5.** Si dice che  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  è un **campo di forze centrale** con centro  $O$  se per ogni  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  vale la relazione

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho) \frac{\mathbf{x}}{\rho}, \quad (3.1)$$

dove  $\rho = |\mathbf{x}|$  ed  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione di classe  $C^1$ .

**Proposizione 11.** Un campo di forze  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  è centrale se e solo se

$$\mathbf{F}(R\mathbf{x}) = R\mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \quad \forall R \in SO(3). \quad (3.2)$$

*Dimostrazione.* Se  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  è della forma (3.1) allora si verifica facilmente che vale (3.2), in quanto si ha  $|R\mathbf{x}| = |\mathbf{x}| = \rho$  per ogni  $R \in SO(3)$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ . Assumiamo adesso che valga (3.2). Mostriamo prima che  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \times \mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Per ogni  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , scelta arbitrariamente una rotazione  $R_{\mathbf{x}} \in SO(3)$  con  $R_{\mathbf{x}}\mathbf{x} = \mathbf{x}$ , dalla (3.2) si ottiene

$$R_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(R_{\mathbf{x}}\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}),$$

cioè ogni rotazione che lascia fisso il vettore posizione  $\mathbf{x}$  lascia fissa anche la forza  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ . Ma ogni rotazione in  $\mathbb{R}^3$  diversa dall'identità lascia fissi solo i vettori di uno spazio lineare unidimensionale (che è appunto l'asse di rotazione). Si ha quindi

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \times \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Per dimostrare che  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho) \frac{\mathbf{x}}{\rho}$  per una qualche funzione  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , cioè che il campo di forze è a simmetria sferica, scegliamo arbitrariamente  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  tali

che  $|\mathbf{x}| = |\mathbf{y}|$ , che rappresentano le coordinate di due punti sulla stessa superficie sferica centrata nell'origine, e dimostriamo che

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{y}. \quad (3.3)$$

Scelta  $R \in SO(3)$  tale che  $R\mathbf{x} = \mathbf{y}$ , e usando (3.2) si ha

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{F}(R\mathbf{x}) \cdot R\mathbf{x} = R\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot R\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}.$$

Dalla (3.3) segue che l'intensità della forza  $\mathbf{F}$  è la stessa in tutti i punti della sfera di raggio  $|\mathbf{x}| = |\mathbf{y}|$ . □

Osserviamo che in questo caso le equazioni di Newton  $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  sono invarianti solo rispetto ad alcune trasformazioni di Galileo, quelle del tipo  $g_3$ , ma non lo sono rispetto alle traslazioni dell'origine, che corrisponde al centro di forza.

### 3.1 Integrabilità dei moti centrali

Consideriamo il moto di un punto materiale di massa  $m$  in un campo di forze centrali  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho)\frac{\mathbf{x}}{\rho}$ . Dalla relazione

$$\dot{\mathbf{M}}_O = \mathbf{N}_O = \mathbf{x} \times f(\rho)\frac{\mathbf{x}}{\rho} = \mathbf{0}$$

abbiamo la conservazione del momento angolare  $\mathbf{M}_O$  rispetto al centro di forze  $O$ . Inoltre la forza  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  è conservativa, con energia potenziale

$$V(\mathbf{x}) = \mathcal{V}(\rho(\mathbf{x})), \quad \mathcal{V}(\rho) = - \int f(\rho) d\rho, \quad (3.4)$$

infatti

$$\nabla V(\mathbf{x}) = \frac{d\mathcal{V}}{d\rho}(\rho(\mathbf{x}))\nabla\rho(\mathbf{x}) = -f(\rho(\mathbf{x}))\frac{\mathbf{x}}{\rho(\mathbf{x})},$$

per cui si conserva l'energia totale  $E = T + V$ .

Ricordiamo che un sistema meccanico si dice integrabile secondo Liouville se per ogni scelta delle condizioni iniziali possiamo scrivere la soluzione delle equazioni di Newton a meno di inversioni e quadrature.

**Proposizione 12.** *Il sistema dato da un punto materiale che si muove in un campo di forze centrali è integrabile.*

Trattiamo prima il caso particolare in cui  $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$  e mostriamo che in questo caso il moto si svolge su una retta passante per  $O$ . Poiché  $\mathbf{M}_O = m\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ , possiamo trovare un vettore unitario  $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$  con<sup>1</sup>

$$\mathbf{x}(0) = \rho_0 \mathbf{e}, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \dot{\rho}_0 \mathbf{e}.$$

Se  $t \mapsto \rho(t)$  è la soluzione del problema di Cauchy unidimensionale

$$m\ddot{\rho} = f(\rho), \quad \rho(0) = \rho_0, \quad \dot{\rho}(0) = \dot{\rho}_0, \quad (3.5)$$

che si può scrivere a meno di inversioni e quadrature, allora

$$t \mapsto \mathbf{x}(t) = \rho(t) \mathbf{e}$$

è la soluzione di  $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ , con dati iniziali  $\mathbf{x}(0), \dot{\mathbf{x}}(0)$ , e il moto è quindi rettilineo, su una retta passante per  $O$ .

Osserviamo che vale anche il viceversa: se il moto avviene lungo una retta passante per  $O$  allora  $\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)$  sono sempre paralleli, quindi  $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$ .

Assumiamo adesso che  $\mathbf{M}_O \neq \mathbf{0}$ . Possiamo usare la conservazione del momento angolare  $\mathbf{M}_O$  per ridurci ad un problema unidimensionale. L'invarianza della direzione di  $\mathbf{M}_O$  implica che il moto si svolge su un piano fisso  $\pi_O$  che dipende dalle condizioni iniziali: infatti la relazione

$$\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \times m\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x} = 0$$

ci dice che il vettore  $\mathbf{x}$  è sempre ortogonale a  $\mathbf{M}_O$ . Possiamo quindi ruotare il sistema di riferimento  $O \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3$  introdotto, in funzione delle condizioni iniziali, facendo in modo che  $\mathbf{e}_3 \parallel \mathbf{M}_O$ . Con questa rotazione il moto si svolge quindi nel piano  $\pi_O = O\hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2$ . Introduciamo in questo piano delle coordinate polari  $\rho, \theta$ , definite da

$$\mathbf{e}_\rho = \frac{\mathbf{x}}{\rho} = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2.$$

Consideriamo anche il vettore

$$\mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_\rho = -\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2$$

ed osserviamo che valgono le relazioni

$$\dot{\mathbf{e}}_\rho = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta, \quad \dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta} \mathbf{e}_\rho.$$

Possiamo quindi scrivere

$$\mathbf{x} = \rho \mathbf{e}_\rho, \quad \dot{\mathbf{x}} = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \dot{\theta} \rho \mathbf{e}_\theta, \quad \ddot{\mathbf{x}} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \mathbf{e}_\rho + (\rho \ddot{\theta} + 2\dot{\rho} \dot{\theta}) \mathbf{e}_\theta.$$

---

<sup>1</sup>possiamo scegliere il verso di  $\mathbf{e}$  in modo tale che  $\rho_0 > 0$ .

L'equazione di Newton, proiettata lungo  $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta$ , ci dà

$$m\ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_\rho = f(\rho), \quad m\ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_\theta = 0. \quad (3.6)$$

La seconda equazione in (3.6) rappresenta la conservazione della terza componente del momento angolare

$$\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{e}_3 = \rho \mathbf{e}_\rho \times m(\dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta) \cdot \mathbf{e}_3 = m\rho^2 \dot{\theta},$$

infatti

$$m(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}) = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\theta}).$$

Fissiamo un valore  $c \neq 0$  di tale quantità:

$$m\rho^2\dot{\theta} = c. \quad (3.7)$$

Sostituendo  $\dot{\theta} = \frac{c}{m\rho^2}$  nella prima equazione in (3.6) si ottiene

$$m\ddot{\rho} = f(\rho) + \frac{c^2}{m\rho^3}, \quad (3.8)$$

che è un problema unidimensionale. Possiamo scrivere (3.8) nella forma

$$m\ddot{\rho} = -\frac{d}{d\rho} \mathcal{V}_{\text{eff}}^{(c)}(\rho), \quad (3.9)$$

con

$$\mathcal{V}_{\text{eff}}^{(c)}(\rho) = \mathcal{V}(\rho) + \frac{c^2}{2m\rho^2}.$$

La funzione  $\mathcal{V}_{\text{eff}}^{(c)}$  si dice energia potenziale efficace. Il sistema (3.9) ha l'integrale primo

$$\mathcal{E}_{\text{eff}}^{(c)}(\rho, \dot{\rho}) = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \mathcal{V}_{\text{eff}}^{(c)}(\rho),$$

che corrisponde all'energia totale  $E = T + V$  (che non dipende da  $\theta$ ) se scriviamo  $\dot{\theta}$  come funzione di  $\rho, \dot{\rho}, c$  tramite la relazione (3.7):

$$E|_{\dot{\theta}=\frac{c}{m\rho^2}} = \left[ \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2) + \mathcal{V}(\rho) \right] \Big|_{\dot{\theta}=\frac{c}{m\rho^2}} = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{c^2}{2m\rho^2} + \mathcal{V}(\rho) = \mathcal{E}_{\text{eff}}^{(c)}(\rho, \dot{\rho}).$$

Di seguito scriveremo semplicemente  $\mathcal{V}_{\text{eff}}, \mathcal{E}_{\text{eff}}$ , evitando di sottolineare la dipendenza da  $c$  di tali funzioni.

## 3.2 Legge delle aree

Dalla conservazione del momento angolare si ha che, se  $\mathbf{M}_O \neq \mathbf{0}$ ,  $\theta$  è monotona, quindi può essere utilizzata come variabile indipendente per descrivere la traiettoria. Infatti se  $c \neq 0$ , allora  $\dot{\theta} = \frac{c}{m\rho^2}$  ha lo stesso segno di  $c$ .

Sia  $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\theta; \theta_0)$  l'insieme descritto dal raggio vettore quando l'angolo polare passa dal valore  $\theta_0$  a  $\theta$ . L'area di questo insieme è

$$a(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \int_0^{\rho(\theta')} \rho' d\rho' d\theta' = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta} \rho^2(\theta') d\theta',$$

per cui, posto  $\tilde{a}(t) = a(\theta(t))$ , si ha

$$\frac{d\tilde{a}}{dt} = \frac{da}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{1}{2} \rho^2 \dot{\theta} = \frac{c}{2m},$$

quindi la conservazione della terza componente del momento angolare

$$\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{e}_3 = m\rho^2 \dot{\theta}$$

corrisponde alla conservazione della velocità areolare, detta anche **legge delle aree**.

## 3.3 Formula di Binet

Consideriamo un punto materiale che si muove in un piano in cui mettiamo coordinate polari  $(\rho, \theta)$ . Assumiamo che valga la legge delle aree:

$$\frac{1}{2} \rho^2 \dot{\theta} = \alpha,$$

con  $\alpha \neq 0$ . Queste ipotesi valgono in particolare nel caso dei moti centrali. Allora la componente radiale dell'accelerazione è

$$\ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_\rho = -\frac{4\alpha^2}{\rho^2} \left( \frac{d^2}{d\theta^2} \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} \right). \quad (3.10)$$

Infatti

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \frac{d\rho}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{2\alpha}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\theta} = -2\alpha \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{\rho} \right), \\ \ddot{\rho} &= \frac{d\dot{\rho}}{d\theta} \dot{\theta} = -\frac{4\alpha^2}{\rho^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{\rho} \right), \end{aligned}$$

per cui, usando la relazione  $\ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_\rho = \ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2$  si ottiene (3.10), che si chiama **formula di Binet**.

### 3.3.1 Equazione differenziale per la traiettoria

Sostituendo la formula di Binet nell'equazione

$$m\ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_\rho = f(\rho)$$

si ottiene un'equazione differenziale per la traiettoria in forma polare:

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} = -\frac{\rho^2}{4m\alpha^2} f(\rho). \quad (3.11)$$

Ponendo

$$u = \frac{1}{\rho},$$

l'equazione (3.11) si può scrivere

$$u'' = g(u), \quad (3.12)$$

dove

$$g(u) = -f \left( \frac{1}{u} \right) \frac{1}{4m\alpha^2 u^2} - u$$

e l'apice indica ' la derivata rispetto a  $\theta$ .

## 3.4 Descrizione della traiettoria

Fissate le condizioni iniziali  $\mathbf{x}(0), \dot{\mathbf{x}}(0)$ , possiamo determinare il comportamento qualitativo della traiettoria nel piano del moto utilizzando le leggi di conservazione

$$m\rho^2\dot{\theta} = c, \quad \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho) = E, \quad (3.13)$$

in cui  $c, E$  sono i valori delle quantità conservate al tempo iniziale  $t = 0$ .

Se  $c = 0$  abbiamo già visto nella Proposizione 12 che la traiettoria è rettilinea. Se  $c \neq 0$  sappiamo di poter descrivere la traiettoria in forma polare attraverso una mappa  $\theta \mapsto \rho(\theta)$ , ad esempio risolvendo (3.12). Mostriamo che la traiettoria ha delle proprietà di simmetria considerando il caso seguente, in cui essa è limitata. Siano  $\rho_{\min}, \rho_{\max}$  due punti di inversione consecutivi ( $\rho_{\min} < \rho_{\max}$ ) che corrispondono a un valore regolare  $E$  dell'energia, tali che il moto si svolga all'interno dell'intervallo  $[\rho_{\min}, \rho_{\max}]$ . Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} E - \mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho_{\min}) &= E - \mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho_{\max}) = 0, \\ E - \mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho) &> 0 \text{ se } \rho \in (\rho_{\min}, \rho_{\max}), \\ \mathcal{V}'_{\text{eff}}(\rho_{\min}) &< 0 < \mathcal{V}'_{\text{eff}}(\rho_{\max}). \end{aligned} \quad (3.14)$$

In questo caso, nello spazio delle fasi ridotto con coordinate  $(\rho, \dot{\rho})$  abbiamo un'orbita periodica di periodo

$$T_\rho = \sqrt{2m} \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \frac{1}{\sqrt{E - \mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho)}} d\rho.$$

Nel piano del moto genericamente<sup>2</sup> si ottiene una traiettoria a forma di rosetta (vedi figura), infatti dalla conservazione del momento angolare si ha che  $t \mapsto \theta(t)$  è monotona. Inoltre  $\rho(t)$  oscilla periodicamente tra il valore massimo  $\rho_{\max}$  e il valore minimo  $\rho_{\min}$ .

Dalle (3.13) si ottiene

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \pm \frac{m\rho^2}{|c|} \sqrt{\frac{2}{m}(E - \mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho))}. \quad (3.15)$$

Definiamo l'**angolo di avanzamento** del pericentro come

$$\Delta\theta = |c| \sqrt{\frac{2}{m}} \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \frac{1}{\rho^2 \sqrt{E - \mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho)}} d\rho. \quad (3.16)$$

Mostriamo che la traiettoria è completamente determinata da una sua porzione, che va da un pericentro all'apocentro successivo.

**Proposizione 13.** *Assumendo che valgano le relazioni (3.14), la mappa  $\theta \mapsto \rho(\theta)$ , che definisce la traiettoria della soluzione tramite*

$$(x(\theta), y(\theta)) = (\rho(\theta) \cos \theta, \rho(\theta) \sin \theta),$$

ha le simmetrie definite dalle relazioni

$$\begin{aligned} \rho(\Delta\theta - \theta) &= \rho(\theta), & \theta &\in [0, \Delta\theta] \\ \rho(\Delta\theta + \theta) &= \rho(\theta), & \theta &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

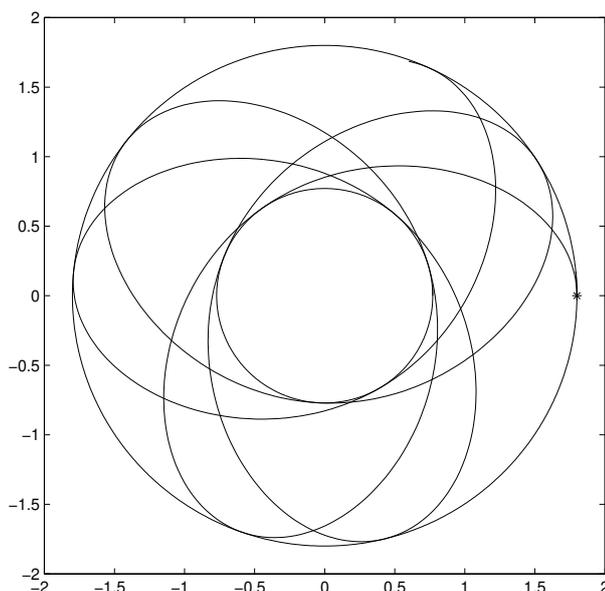
dove abbiamo assunto che  $\rho(0)$  corrisponda ad un punto di inversione, per cui  $\rho'(0) = \dot{\rho}(0)/\dot{\theta}(0) = 0$ .

*Dimostrazione.* Possiamo dimostrare questa proprietà di simmetria tramite la formula di Binet per la quale, posto

$$u = \frac{1}{\rho},$$

---

<sup>2</sup>cioè per una scelta generica di  $E$  e  $c$  per cui valgono le (3.14)



si ottiene

$$u'' = g(u), \quad g(u) = -\frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{4m\alpha^2 u^2} - u. \quad (3.17)$$

Siano  $u_{\max} = 1/\rho_{\min}$ ,  $u_{\min} = 1/\rho_{\max}$ . Questi sono punti di inversione per il moto unidimensionale definito da (3.17) in corrispondenza al livello  $\frac{E}{4m\alpha^2}$  dell'energia

$$\mathcal{E}(u, u') = \frac{1}{2}u'^2 + \mathcal{W}(u),$$

dove  $\mathcal{W}(u) = -\int g(u)du$ . Infatti, ricordando che  $2m\alpha = c$ , si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(u) &= -\frac{1}{4m\alpha^2} \int f\left(\frac{1}{u}\right) d\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{u^2}{2} \\ &= \frac{1}{4m\alpha^2} \mathcal{V}\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{u^2}{2} = \frac{1}{4m\alpha^2} \mathcal{V}_{\text{eff}}\left(\frac{1}{u}\right), \end{aligned} \quad (3.18)$$

quindi  $u_{\min}$ ,  $u_{\max}$  risolvono l'equazione

$$\frac{E}{4m\alpha^2} - \mathcal{W}(u) = 0.$$

Derivando la (3.18) rispetto a  $u$  si ottiene

$$\mathcal{W}'(u) = -\frac{1}{4m\alpha^2 u^2} \mathcal{V}'_{\text{eff}}\left(\frac{1}{u}\right),$$

quindi

$$\mathcal{W}'(u_{\max}) = -\frac{\rho_{\min}^2}{4m\alpha^2} \mathcal{V}'_{\text{eff}}(\rho_{\min}) > 0, \quad \mathcal{W}'(u_{\min}) = -\frac{\rho_{\max}^2}{4m\alpha^2} \mathcal{V}'_{\text{eff}}(\rho_{\max}) < 0.$$

Inoltre, si ha

$$\frac{E}{4m\alpha^2} - \mathcal{W}(u) > 0, \quad \forall u \in (u_{\min}, u_{\max}).$$

Avendo un moto per valori regolari dell'energia  $\frac{1}{2}u'^2 + \mathcal{W}(u)$  possiamo procedere come nella Sezione 2.4 per dimostrare che, se  $u(0)$  è un punto di inversione, ad esempio  $u(0) = u_{\min}$ , allora la soluzione  $u(\theta)$  soddisfa le relazioni

$$\begin{aligned} u(T_u - \theta) &= u(\theta), & \theta \in [0, T_u] \\ u(T_u + \theta) &= u(\theta), & \theta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

con

$$T_u = 2 \int_{u_{\min}}^{u_{\max}} \frac{1}{\sqrt{2(\frac{E}{4m\alpha^2} - \mathcal{W}(u))}} du.$$

Usando il cambiamento di variabile  $\rho = \frac{1}{u}$  osserviamo che

$$T_u = -2 \int_{\rho_{\max}}^{\rho_{\min}} \frac{\sqrt{4m\alpha^2}}{\sqrt{2(E - \mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho))\rho^2}} d\rho = |c| \sqrt{\frac{2}{m}} \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \frac{1}{\rho^2 \sqrt{E - \mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho)}} d\rho = \Delta\theta,$$

dove  $\Delta\theta$  è l'angolo di avanzamento del pericentro. Si conclude utilizzando la relazione  $\rho(\theta) = 1/u(\theta)$ . □

**Osservazione 7.** Dalla Proposizione 3.4 si ottiene che la traiettoria  $\rho(\theta)$  è periodica di periodo  $\Delta\theta$  e si può costruire per simmetria a partire dal tratto che va dal pericentro  $P$  all'apocentro successivo  $A$ . Per ottenere il tratto seguente, che va da  $A$  al pericentro successivo  $P'$ , basta infatti riflettere il tratto precedente rispetto all'asse che passa per  $A$  e  $P$ .

**Osservazione 8.** La condizione per avere una traiettoria periodica nel piano del moto è che

$$\frac{\Delta\theta}{\pi} \in \mathbb{Q}^+.$$

Infatti, l'avanzamento  $\Delta\theta$  dell'angolo  $\theta$  corrisponde ad un periodo  $T_\rho$  della funzione  $\rho(t)$ . Se  $\frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{h}{k}$  con  $h, k \in \mathbb{N}$ , l'angolo  $\theta$  è avanzato di  $2h\pi$  dopo  $k$  periodi  $T_\rho$  di  $\rho(t)$ . Quindi, partendo da un punto al pericentro ci si ritrova nello stesso punto dopo aver fatto  $h$  giri attorno all'origine. Inoltre, la velocità è la stessa in quanto  $\rho(t) = \rho(t + kT_\rho)$  e  $\dot{\theta}(t) = \frac{c}{m\rho^2(t)}$ .

Dimostriamo adesso la seguente proprietà:

**Proposizione 14.** *Assumendo che valgano le relazioni (3.14), genericamente la traiettoria è ovunque densa nella corona circolare*

$$\mathcal{C} = \{(x, y) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) : \rho_{\min} \leq \rho \leq \rho_{\max}\}.$$

*Dimostrazione.* Vogliamo dimostrare che, se  $\frac{\Delta\theta}{\pi} \notin \mathbb{Q}$ , scelto comunque un punto della corona l'orbita passa arbitrariamente vicino a quel punto. Tutti i valori di  $\rho$  nell'intervallo  $[\rho_{\min}, \rho_{\max}]$  vengono raggiunti periodicamente. Fissiamo una circonferenza  $C_\rho$  centrata in  $O$  e di raggio  $\rho \in [\rho_{\min}, \rho_{\max}]$ . Dimostriamo, seguendo [3], che in generale  $C_\rho$  viene riempita in modo ovunque denso.

Definiamo la mappa

$$\phi : C_\rho \rightarrow C_\rho, \quad \phi(\rho e^{i\theta}) = \rho e^{i(\theta + \Delta\theta)}$$

dove  $\Delta\theta$  è l'angolo di avanzamento del pericentro.

Se  $\Delta\theta/\pi \notin \mathbb{Q}$  allora i punti  $\{\phi^m(x)\}_m$ , con  $x = \rho e^{i\theta}$ , sono tutti distinti. Siccome  $C_\rho$  è compatto c'è almeno un punto di accumulazione, quindi per ogni  $\epsilon > 0$  esistono interi positivi  $m, n$ , con  $n > m$ , tali che

$$d(\phi^n(x), \phi^m(x)) < \epsilon.$$

Inoltre la mappa  $\phi$  conserva la distanza tra due punti perché è una rotazione, quindi

$$d(\phi^{n-m}(x), x) = d(\phi^n(x), \phi^m(x)).$$

Posto  $k = n - m$  otteniamo una successione

$$x, \phi^k(x), \phi^{2k}(x), \phi^{3k}(x), \dots$$

di punti distinti su  $C_\rho$  che sono equidistanti e due consecutivi di essi distano meno di  $\epsilon$ . Si conclude usando l'arbitrarietà di  $\epsilon$  e di  $\rho \in [\rho_{\min}, \rho_{\max}]$ . □

Si può dimostrare che solo due tipi di forze centrali, quelle dell'oscillatore armonico e del problema di Keplero, sono tali che tutte le orbite limitate con momento angolare non nullo sono periodiche. Questo risultato è noto come **teorema di Bertrand** (vedi Sezione 3.7).

### 3.5 Il problema dei due corpi

Studiamo il moto di due punti materiali di massa  $m_1, m_2$  soggetti alla loro interazione mutua. Le equazioni del moto sono

$$m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{F}_1, \quad m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{F}_2$$

e assumiamo che le forze  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$  soddisfino le seguenti proprietà:

$$(i) \quad \mathbf{F}_j = \mathbf{F}_j(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2),$$

- (ii)  $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}$ ,
- (iii)  $\mathbf{F}_j \times \mathbf{r} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ ,
- (iv)  $\mathbf{F}_1 = f(\rho) \frac{\mathbf{r}}{\rho}, \quad \rho = |\mathbf{r}|$

dove  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione di classe  $C^1$ .

Il cambiamento di coordinate

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \mapsto (\mathbf{x}_B, \mathbf{r})$$

definito dalle relazioni

$$(m_1 + m_2)\mathbf{x}_B = m_1\mathbf{x}_1 + m_2\mathbf{x}_2, \quad \mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$$

disaccoppia le equazioni di Newton. Si ottengono infatti le equazioni

$$m\ddot{\mathbf{x}}_B = \mathbf{0}, \quad \mu\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}), \quad (3.19)$$

in cui

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad m = m_1 + m_2.$$

Possiamo quindi studiare il problema di moto centrale dato dalla seconda delle (3.19) e poi ricostruire la soluzione tramite le relazioni

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_B = \frac{m_2}{m} \mathbf{r}, \quad \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_B = -\frac{m_1}{m} \mathbf{r}. \quad (3.20)$$

**Osservazione 9.** Dalle (3.20) si vede che le traiettorie nel riferimento del centro di massa si ottengono per similitudine da quelle del moto relativo, soluzione di un problema di moto centrale.

**Osservazione 10.** Nel caso della forza di attrazione gravitazionale di Newton si ha  $\mathbf{F}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = -G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3} (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$ , dove  $G$  è la costante di gravitazione universale, per cui, utilizzando la relazione  $m\mu = m_1 m_2$ , si ottiene  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{Gm\mu}{\rho^3} \mathbf{r}$ , con  $\rho = |\mathbf{r}|$ . In questo modo la seconda equazione in (3.19) si scrive

$$\mu\ddot{\mathbf{r}} = -Gm\mu \frac{\mathbf{r}}{\rho^3},$$

che corrisponde al problema del moto di un corpo di massa  $\mu$  (**massa ridotta**) che si muove in un campo di forze centrali prodotto dall'attrazione gravitazionale di un punto di massa  $m$  fisso nell'origine.

### 3.6 Il problema di Keplero

Nel periodo tra il 1600 ed il 1601 Johannes Kepler (1571-1630) fu assistente di Tycho Brahe<sup>3</sup> a Praga. Sulla base delle osservazioni di Brahe, Kepler formulò le tre leggi seguenti:

- 1) le traiettorie dei pianeti sono ellissi di cui il Sole occupa uno dei due fuochi;
- 2) il raggio vettore che congiunge un pianeta al Sole descrive aree uguali in tempi uguali;
- 3) i quadrati dei periodi di rivoluzione  $T$  dei pianeti sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori  $a$  delle loro traiettorie. Inoltre la costante  $\frac{T^2}{a^3}$  è la stessa per tutti i pianeti.

Le prime due leggi appaiono in *Astronomia Nova* (1609), la terza si trova in *Harmonices Mundi* (1619).

In questa sezione discuteremo dei seguenti problemi:

- i) *problema di Keplero diretto*: dato il campo di forze calcolare i moti possibili;
- ii) *problema di Keplero inverso*: dati i moti possibili calcolare il campo di forze.

Entrambi i problemi sono stati risolti da Newton, vedi [16].

#### Problema diretto

Posto

$$k = GmM, \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad M = m_1 + m_2,$$

consideriamo il moto centrale dato dalle equazioni

$$m\ddot{\mathbf{x}} = f(\rho)\frac{\mathbf{x}}{\rho}, \quad f(\rho) = -\frac{k}{\rho^2}$$

con  $\rho = |\mathbf{x}|$  e con condizioni iniziali  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ ,  $\dot{\mathbf{x}}(0) = \dot{\mathbf{x}}_0$ . La forza centrale ammette l'energia potenziale

$$V(\mathbf{x}) = -\frac{k}{\rho}.$$

Assumiamo che il momento angolare sia non nullo e introduciamo coordinate polari  $\rho, \theta$  nel piano del moto  $\Pi$ . Sia  $c = m\rho^2\dot{\theta}$  il valore costante della componente del

---

<sup>3</sup>L'astronomo Tycho Brahe (1546-1601) riuscì a fare diverse osservazioni astronomiche dei pianeti conosciuti, con una precisione dell'ordine di un minuto di arco (= 1/60 di grado), che era un'ottima accuratezza considerato il fatto che non aveva ancora a disposizione un telescopio.

momento angolare ortogonale a  $\Pi$ , che corrisponde alle condizioni iniziali scelte. Essendo il moto centrale vale la legge delle aree, che rappresenta la conservazione del momento angolare  $m\rho^2\dot{\theta}$  e ci dà la seconda legge di Keplero.

Proiettando l'equazione di Newton in direzione radiale  $\mathbf{e}_\rho$  e usando la formula di Binet si ottiene l'equazione per la componente radiale della forza:

$$-\frac{4m\alpha^2}{\rho^2} \left[ \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} \right] = -\frac{k}{\rho^2}$$

dove  $\alpha = \frac{c}{2m}$  è la costante delle aree. Ponendo

$$p = \frac{4m\alpha^2}{k} \tag{3.21}$$

e usando la variabile  $u = 1/\rho$  si ottiene l'equazione differenziale lineare

$$u'' + u = \frac{1}{p}. \tag{3.22}$$

L'equazione (3.22) ha come soluzione generale

$$u(\theta) = A \cos(\theta - \theta_0) + \frac{1}{p}$$

con  $A \geq 0$ ,  $\theta_0 \in \mathbb{R}$ . Introducendo il parametro  $e = Ap$  si ha l'equazione di una conica in coordinate polari

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)} \tag{3.23}$$

con un fuoco nell'origine del sistema di riferimento.

**Esercizio 8.** *Verificare questa affermazione confrontando (3.23) con l'equazione di una conica in coordinate cartesiane  $x, y$  nel piano del moto.*

Scriviamo  $p, e$  in funzione di  $c, E$ . Sostituendo la relazione  $\alpha = \frac{c}{2m}$  in (3.21) si ottiene

$$p = \frac{c^2}{mk}. \tag{3.24}$$

Il valore minimo di  $\rho$  lungo la traiettoria definita da (3.23) è dato da

$$\rho_{\min} = \frac{p}{1 + e} \tag{3.25}$$

ed è un punto di inversione del moto per la variabile  $\rho$  se  $e \neq 0$ , altrimenti abbiamo un'orbita circolare e  $\rho_{\min}$  è un equilibrio. In ogni caso, vale la relazione

$$E - \mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho_{\min}) = 0, \tag{3.26}$$

dove

$$\mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho) = -\frac{k}{\rho} + \frac{c^2}{2m\rho^2}$$

è l'energia potenziale efficace del problema di Keplero. Dalle relazioni (3.24), (3.25) si ottiene

$$\rho_{\min} = \frac{c^2}{mk(1+e)}$$

che, sostituita nella (3.26), ci dà

$$\begin{aligned} 0 &= E + \frac{k}{\rho_{\min}} - \frac{c^2}{2m\rho_{\min}^2} = E + \frac{mk^2(1+e)}{c^2} - \frac{c^2m^2k^2(1+e)^2}{2mc^4} = \\ &= E + \frac{mk^2(1+e)}{c^2} \left(1 - \frac{1+e}{2}\right) = E + \frac{mk^2(1-e^2)}{2c^2}, \end{aligned}$$

da cui

$$e^2 = 1 + \frac{2Ec^2}{mk^2}. \quad (3.27)$$

Dalla (3.27) si ottiene che

$$\begin{aligned} E < 0 &\iff e < 1 && \text{orbite ellittiche,} \\ E = 0 &\iff e = 1 && \text{orbite paraboliche,} \\ E > 0 &\iff e > 1 && \text{orbite iperboliche.} \end{aligned}$$

Nel caso  $E < 0$  troviamo le traiettorie ellittiche della prima legge di Keplero. Inoltre dalla relazione  $mk^2 + 2Ec^2 \geq 0$  segue che non tutte le coppie  $(c, E)$  sono ammissibili (vedi Figura 3.1).

Calcoliamo adesso il periodo  $T$  di un'orbita ellittica che corrisponde ai valori  $c, E$  ( $E < 0$ ) del momento angolare e dell'energia. Valgono le relazioni seguenti, che legano semiasse maggiore  $a$ , semiasse minore  $b$  ai parametri  $p, e$  e quindi ai valori di  $c, E$ :

$$p = a(1 - e^2), \quad b = a\sqrt{1 - e^2}, \quad (3.28)$$

per cui

$$p = \frac{b^2}{a}. \quad (3.29)$$

**Esercizio 9.** Dimostrare le formule (3.28), (3.29).

L'area dell'ellisse è

$$\pi ab = \pi a\sqrt{ap} = \pi a^{3/2} \frac{|c|}{\sqrt{mk}}$$

e la velocità areale è

$$\alpha = \frac{c}{2m},$$

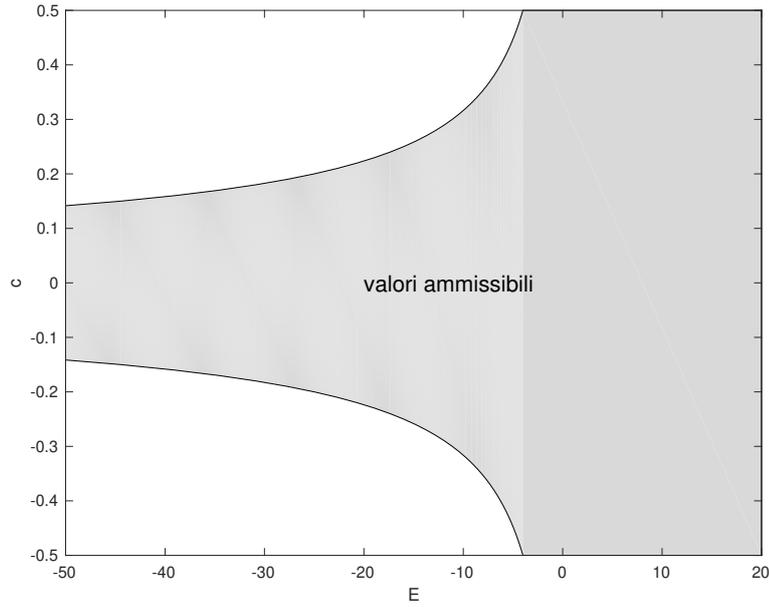


Figura 3.1: Valori ammissibili per la coppia  $(E, c)$ .

per cui

$$T^2 = \frac{(\pi ab)^2}{\alpha^2} = \frac{\pi^2 a^3 c^2 4m^2}{mk c^2} = \frac{4\pi^2 m}{k} a^3$$

che rappresenta la terza legge di Keplero. In particolare, il periodo  $T$  dipende solo dal semiasse maggiore  $a$  e quindi solo dall'energia  $E$ , infatti, usando

$$c^2 = mkp = mka(1 - e^2),$$

si ha

$$E = \mathcal{E}_{\text{eff}}(\rho_{\min}, 0) = -\frac{k}{a(1-e)} + \frac{c^2}{2ma^2(1-e)^2} = -\frac{k}{a(1-e)} \left[1 - \frac{1}{2}(1+e)\right] = -\frac{k}{2a}.$$

**Osservazione 11.** Se consideriamo il problema di Keplero derivante dal problema di due corpi di massa  $m_1, m_2$  si ha

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad k = Gm_1 m_2,$$

per cui  $k/m = G(m_1 + m_2)$  e la costante di proporzionalità è quindi

$$\frac{4\pi^2 m}{k} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}. \quad (3.30)$$

Se  $m_1$  ed  $m_2$  rappresentano rispettivamente la massa del Sole e quella di un pianeta, dalla (3.30) segue che la costante  $k/m$  dipende dal pianeta scelto, contraddicendo quindi parte della terza legge di Keplero. Comunque, usando come unità la massa solare  $m_1$  e scegliendo pianeti diversi del sistema solare la variazione della somma  $m_1 + m_2$  è al massimo dell'ordine di  $10^{-3}$ , che corrisponde al rapporto tra la massa di Giove e quella del Sole.

## Il vettore di Laplace-Lenz

Introduciamo il **vettore di Laplace-Lenz**

$$\mathbf{L} = \mathbf{p} \times \mathbf{M}_O - mk \frac{\mathbf{x}}{\rho}, \quad (3.31)$$

dove  $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{x}}$ .

Mostriamo che  $\mathbf{L}$  è un integrale primo per il moto centrale con energia potenziale di Keplero  $\mathcal{V}(\rho) = -\frac{k}{\rho}$ :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}} &= \dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{M}_O - mk \left[ \frac{\mathbf{v}}{\rho} - \frac{\mathbf{x}}{\rho^2} \frac{d}{dt}(\sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}) \right] = \\ &= \left( -\frac{k\mathbf{x}}{\rho^3} \right) \times (\mathbf{x} \times m\dot{\mathbf{x}}) - \frac{mk}{\rho} \dot{\mathbf{x}} + \frac{mk}{\rho^2} \mathbf{x} \left( \frac{2\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}}}{2\rho} \right) = \\ &= -\frac{mk}{\rho^3} [(\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}})\mathbf{x} - \rho^2 \dot{\mathbf{x}}] - \frac{mk}{\rho} \dot{\mathbf{x}} + \frac{mk}{\rho^3} (\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}})\mathbf{x} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Calcoliamo adesso la norma di  $\mathbf{L}$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} &= \left( \mathbf{p} \times \mathbf{M}_O - mk \frac{\mathbf{x}}{\rho} \right) \cdot \left( \mathbf{p} \times \mathbf{M}_O - mk \frac{\mathbf{x}}{\rho} \right) = \\ &= |\mathbf{p} \times \mathbf{M}_O|^2 - 2 \frac{mk}{\rho} \mathbf{p} \times \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{x} + m^2 k^2 = \\ &= \left( |\mathbf{p}|^2 - 2 \frac{mk}{\rho} \right) \mathbf{p} \times \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{x} + m^2 k^2, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato

$$\mathbf{p} \times \mathbf{M}_O = \mathbf{p} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{p}) = |\mathbf{p}|^2 \mathbf{x} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})\mathbf{p},$$

per cui

$$(\mathbf{p} \times \mathbf{M}_O) \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{M}_O) = |\mathbf{p}|^2 \mathbf{p} \times \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{x}.$$

Usando la relazione

$$\mathbf{p} \times \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \times \mathbf{p} \cdot \mathbf{M}_O = |\mathbf{M}_O|^2 = c^2,$$

l'espressione dell'energia cinetica  $T = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m}$  e la (3.27) si ottiene quindi

$$\begin{aligned}\mathbf{L} \cdot \mathbf{L} &= c^2 \left( |\mathbf{p}|^2 - 2 \frac{mk}{\rho} \right) + m^2 k^2 = c^2 \left( 2mT - 2 \frac{mk}{\rho} \right) + m^2 k^2 = \\ &= 2mEc^2 + m^2 k^2 = m^2 k^2 \left( \frac{2Ec^2}{mk^2} + 1 \right) = m^2 k^2 e^2.\end{aligned}$$

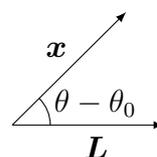
Concludo che la norma del vettore di Laplace-Lenz è il prodotto di  $mk$  e dell'eccentricità  $e$ . Per questo motivo  $\mathbf{L}$  viene anche chiamato **vettore eccentricità**.

Denotiamo con  $\psi$  l'angolo tra  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{L}$ . Si ha allora

$$e \cos \psi = \frac{\mathbf{L} \cdot \mathbf{x}}{mk} \cdot \frac{1}{\rho} = \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{x}}{mk\rho} - 1 = \frac{c^2}{mk\rho} - 1.$$

Usando la (3.24) si ottiene

$$1 + e \cos \psi = \frac{p}{\rho}$$



e si ritrova l'equazione della traiettoria in forma polare (3.23) con l'angolo  $\psi$  al posto di  $\theta - \theta_0$ .

Ne segue che  $\mathbf{L}$  deve indicare la direzione del pericentro, che corrisponde a  $\theta = \theta_0$  (vedi figura).

## Problema inverso

Mostriamo che, se valgono le leggi di Keplero, l'accelerazione di ogni pianeta è sempre diretta verso il Sole ed è inversamente proporzionale al quadrato della distanza da esso.

Il fatto che il moto sia piano (perché le traiettorie sono ellissi) e che valga la legge delle aree implica che l'accelerazione sia puramente radiale.

Sostituiamo l'equazione della traiettoria, nota per la prima legge di Keplero,

$$\rho(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

nella formula di Binet:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_\rho = -\frac{4\alpha^2}{\rho^2} \left[ \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} \right] = -\frac{4\alpha^2}{\rho^2} \left( -\frac{e \cos \theta}{p} + \frac{1 + e \cos \theta}{p} \right) = -\frac{4\alpha^2}{p} \frac{1}{\rho^2}.$$

Esaminiamo adesso il fattore  $\frac{4\alpha^2}{p}$ , che potrebbe cambiare al variare delle condizioni iniziali. Scegliamo un'orbita ellittica. Siano  $T, a, b$  il periodo ed i semiassi maggiore e minore di quest'orbita. Usando la formula  $\alpha = \frac{\pi ab}{T}$  e la (3.29) si ottiene

$$\frac{4\alpha^2}{p} = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2} \frac{a}{b^2} = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}$$

che per la terza legge di Keplero è costante.

### 3.7 Il teorema di Bertrand

Nel 1873 viene pubblicato il seguente risultato di J. Bertrand (vedi [5]): ‘tra le leggi di attrazione che assumono azione nulla a distanza infinita, quella della natura è la sola per la quale un corpo, lanciato *arbitrariamente*, con una velocità inferiore a un certo limite, e attirato verso un centro fisso, descrive necessariamente attorno a questo centro una curva chiusa. Tutte le leggi di attrazione *permettono* orbite chiuse, ma la legge della natura è la sola che le impone.<sup>4</sup>

Diamo di seguito un enunciato più formale, che include forze che non decadono con la distanza.

**Teorema 1.** *Dato un campo di forze centrale attrattivo  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho)\frac{\mathbf{x}}{\rho}$ ,  $\rho = |\mathbf{x}|$ , con  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  analitica ed  $f(\rho) < 0$ , tale che tutte le traiettorie non rettilinee e limitate siano chiuse, allora*

$$f(\rho) = -\frac{A}{\rho^2} \quad \text{oppure} \quad f(\rho) = -A\rho$$

per una costante  $A > 0$ .

*Dimostrazione.* Utilizzeremo prevalentemente la notazione di Bertrand e seguiremo la sua dimostrazione, aggiungendo alcuni dettagli. Essendo la forza centrale, se consideriamo traiettorie non rettilinee queste hanno necessariamente momento angolare non nullo. Introduciamo coordinate polari  $\rho, \theta$  nel piano del moto e denotiamo con  $c$  il valore costante della componente del momento angolare  $m\rho^2\dot{\theta}$ , ortogonale a tale piano. Dalla formula di Binet si ha

$$f(\rho) = -\frac{k^2}{\rho^2} \left[ \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} \right]$$

dove

$$k^2 = \frac{c^2}{m}.$$

Ponendo  $z = 1/\rho$  e

$$\psi(z) = -\rho^2 f(\rho) \Big|_{\rho=1/z}$$

si ottiene

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} + z - \frac{1}{k^2} \psi(z) = 0. \quad (3.32)$$

---

<sup>4</sup>J. Bertrand (1873): ‘parmi les lois d’attraction qui supposent l’action nulle à une distance infinie, celle de la nature est la seule pour laquelle un mobile lancé *arbitrairement* avec une vitesse inférieure à une certaine limite, et attiré vers un centre fixe, décrive nécessairement autour de ce centre une courbe fermée. Toutes les lois d’attraction *permettent* des orbites fermées, mais la loi de la nature est la seule qui les *impose*’

Moltiplicando la relazione (3.32) per  $\frac{dz}{d\theta}$  ed integrando rispetto a  $\theta$  si ha

$$\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 + z^2 - \frac{1}{k^2}w(z) = h$$

per una qualche costante  $h$ , con

$$w(z) = 2 \int \psi(z) dz. \quad (3.33)$$

Ricaviamo la relazione che lega  $h, k^2$  all'energia  $E$  di questo moto centrale. Dalle relazioni

$$w(z) = -2 \int \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) dz = 2 \int f\left(\frac{1}{z}\right) d\left(\frac{1}{z}\right) = -2\mathcal{V}\left(\frac{1}{z}\right),$$

con  $-\frac{d\mathcal{V}}{d\rho}(\rho) = f(\rho)$  e

$$\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 = \frac{1}{\rho^4} \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2,$$

con

$$\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 = \frac{\dot{\rho}^2}{\theta^2} \Big|_{t=t(\theta)} = \frac{m^2}{c^2} \rho^4 \dot{\rho}^2 \Big|_{t=t(\theta)}, = \frac{m}{k^2} \rho^4 \dot{\rho}^2 \Big|_{t=t(\theta)},$$

si ottiene

$$\frac{h}{2} = \frac{1}{k^2} \left( \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 + \frac{k^2}{2\rho^2} + \mathcal{V}(\rho) \right) = \frac{E}{k^2}.$$

Osserviamo che l'ipotesi che la forza sia attrattiva implica l'esistenza di orbite circolari di raggio  $\rho_o = 1/z_o$  per ogni scelta di  $z_o > 0$ : infatti queste corrispondono ad equilibri dell'equazione differenziale

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} = \phi_k(z),$$

con

$$\phi_k(z) = \frac{1}{k^2} \psi(z) - z,$$

e per ogni  $z_o > 0$  possiamo trovare  $k$  tale che  $\phi_k(z_o) = 0$ . In particolare si ottiene che l'insieme delle orbite limitate non è vuoto.

Mostriamo adesso, prendendo spunto da in [1], che se tutte le orbite non rettilinee e limitate sono chiuse possiamo trovare, variando  $k$ , un intervallo aperto non vuoto di valori di  $z = z_o$  corrispondenti ad orbite circolari che sono minimi locali non degeneri dell'energia potenziale

$$\mathcal{W}_k(z) = - \int \phi_k(z) dz,$$

cioè tali che  $\phi'_k(z_o) < 0$ . Il valore di  $h$  per cui si ha un'orbita circolare di raggio  $\rho_o = 1/z_o$  è dato da

$$\frac{h}{2} = \mathcal{W}_k(z_o).$$

Osserviamo che non è possibile che  $\phi'_k(z_o) > 0$ . Infatti, analizzando il comportamento della separatrice stabile del sistema  $\frac{dz}{d\theta} = v$ ,  $\frac{dv}{d\theta} = \phi_k(z)$ , si dimostra che ci sarebbe un'orbita limitata asintotica all'equilibrio  $z_o$ , che quindi non potrebbe essere chiusa.<sup>5</sup>

Osserviamo anche che le equazioni

$$\phi_k(z) = 0, \quad \phi'_k(z) = 0$$

non possono essere soddisfatte per valori di  $(z, k)$  che formano un continuo. Infatti in tal caso, usando la definizione di  $\phi_k$  ed eliminando  $k$ , si avrebbe

$$\frac{\psi'(z)}{\psi(z)} = \frac{1}{z},$$

che integrata ci dà  $\psi(z) = Az$ , con  $A > 0$ , e quindi

$$f(\rho) = -\frac{1}{\rho^2} \psi\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{A}{\rho^3}.$$

In questo caso l'energia potenziale efficace sarebbe

$$\mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho) = \frac{c^2 - mA}{2m\rho^2}$$

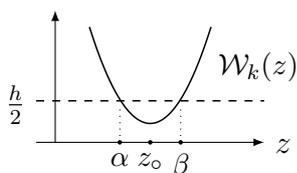
e si vede facilmente che, se  $c^2 < mA$  ed  $E < 0$ , si hanno delle traiettorie limitate, non rettilinee, che tendono all'origine (cioè  $\rho \rightarrow 0$ ), quindi non sono chiuse (l'origine è un punto singolare).

Concludiamo che, in virtù delle ipotesi fatte, esiste una coppia  $(z_o, k)$  tale che

$$\phi_k(z_o) = 0, \quad \phi'_k(z_o) < 0.$$

Per continuità possiamo trovare (variando  $k$ ) un intervallo  $\mathcal{J}_o$  aperto non vuoto di valori di  $z$ , corrispondenti ad orbite circolari, che sono minimi locali non degeneri di  $\mathcal{W}_k(z)$ . Vicino a queste orbite circolari, troviamo (variando  $h$ ) delle orbite limitate, con traiettorie del tipo di quelle studiate nella Sezione 3.4. Per ciascuna di queste orbite limitate chiamiamo  $\alpha = z_{\min}$ ,  $\beta = z_{\max}$  i valori minimo e massimo di  $z$ . L'idea è di considerare dei valori degli integrali primi  $k^2, h$  tali che  $0 < \alpha < \beta$ , e  $\mathcal{W}_k''(z) > 0$  per ogni  $z \in [\alpha, \beta]$ , come nella figura seguente

<sup>5</sup>basta prendere il ramo di separatrice stabile con  $z > z_o$  nel piano  $(z, z')$ .



Calcoliamo la relazione che lega  $k^2, h$  ad  $\alpha, \beta$ . Osserviamo che questi ultimi sono punti di inversione, quindi

$$h + \frac{1}{k^2}w(\alpha) - \alpha^2 = 0, \quad h + \frac{1}{k^2}w(\beta) - \beta^2 = 0,$$

da cui

$$\frac{1}{k^2} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{w(\beta) - w(\alpha)}, \quad h = \frac{\alpha^2 w(\beta) - \beta^2 w(\alpha)}{w(\beta) - w(\alpha)}.$$

Il determinante della matrice jacobiana della mappa

$$(\alpha, \beta) \mapsto (1/k^2, h) \tag{3.34}$$

si scrive

$$-\frac{1}{(w(\beta) - w(\alpha))^3} [w'(\alpha)(\alpha^2 - \beta^2) + 2\alpha(w(\beta) - w(\alpha))] [w'(\beta)(\alpha^2 - \beta^2) + 2\beta(w(\beta) - w(\alpha))]. \tag{3.35}$$

Mostriamo che questo determinante non si può annullare per ogni  $\alpha, \beta$  scelti in un intervallo di valori positivi. Se per assurdo questo non fosse vero, allora esisterebbe un intervallo  $\mathcal{I}$  tale che

$$w'(\alpha)(\alpha^2 - \beta^2) + 2\alpha(w(\beta) - w(\alpha)) = 0, \tag{3.36}$$

oppure

$$w'(\beta)(\alpha^2 - \beta^2) + 2\beta(w(\beta) - w(\alpha)) = 0, \tag{3.37}$$

per ogni  $\alpha, \beta \in \mathcal{I}$ , con  $0 < \alpha < \beta$ . Sostituendo nell'equazione (3.36) lo sviluppo di Taylor

$$w(\beta) = w(\alpha) + w'(\alpha)(\beta - \alpha) + \frac{1}{2}w''(\alpha)(\beta - \alpha)^2 + O((\beta - \alpha)^3)$$

si ottiene

$$[-w'(\alpha) + \alpha w''(\alpha)](\beta - \alpha)^2 + O((\beta - \alpha)^3) = 0, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathcal{I}.$$

Si ha quindi

$$\alpha w''(\alpha) - w'(\alpha) = 0, \quad \forall \alpha \in \mathcal{I}.$$

Ricordando la relazione (3.33), si ottiene l'equazione differenziale

$$z\psi'(z) = \psi(z)$$

da cui  $\psi(z) = Az$ , con  $A > 0$ , quindi

$$f(\rho) = -\frac{A}{\rho^3},$$

che non soddisfa le ipotesi del teorema per quanto detto prima. L'equazione (3.37) conduce in modo analogo alla stessa contraddizione.

Esiste quindi un intervallo aperto non vuoto  $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}_o$  tale che nell'insieme

$$\{(\alpha, \beta) \in \mathcal{J} \times \mathcal{J} : 0 < \alpha < \beta\}$$

la mappa (3.34) è un diffeomorfismo.

L'angolo di avanzamento del pericentro  $\Delta\theta$  è dato da

$$\Delta\theta = 2 \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dz}{\sqrt{h + \frac{1}{k^2}w(z) - z^2}}.$$

Poichè le orbite considerate sono chiuse, si deve avere  $\Delta\theta = q\pi$ , con  $q \in \mathbb{Q}$ . Scrivendo  $k^2, h$  in funzione di  $\alpha, \beta$  otteniamo che deve valere la relazione

$$q\pi = I(\alpha, \beta) \quad (3.38)$$

con

$$I(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{w(\beta) - w(\alpha)}}{\sqrt{\alpha^2 w(\beta) - \beta^2 w(\alpha) + (\beta^2 - \alpha^2)w(z) - z^2(w(\beta) - w(\alpha))}} dz \quad (3.39)$$

per ogni  $\alpha, \beta \in \mathcal{J}$ , con  $0 < \alpha < \beta$ , quindi  $q$  deve essere costante poichè  $\mathbb{Q}$  è un insieme totalmente sconnesso.

Selezioniamo in due passi i potenziali ammissibili, che soddisfano (3.38). Il primo passo consiste nel considerare traiettorie con  $\alpha, \beta$  molto vicini e passare al limite per  $\beta \rightarrow \alpha$ . Consideriamo un valore di  $\alpha \in \mathcal{J}$  e poniamo  $\beta = \alpha + u$ ,  $z = \alpha + y$ . Calcoliamo  $\lim_{u \rightarrow 0} I(\alpha, \alpha + u)$  tramite la formula di Taylor:

$$w(\beta) - w(\alpha) = w'(\alpha)u + \frac{1}{2}w''(\alpha)u^2 + o(u^2),$$

inoltre

$$\begin{aligned} & \alpha^2 w(\beta) - \beta^2 w(\alpha) + (\beta^2 - \alpha^2)w(z) - z^2(w(\beta) - w(\alpha)) = \\ &= \alpha^2 w(\beta) - \beta^2 w(\alpha) + (\beta^2 - \alpha^2) \left[ w(\alpha) + w'(\alpha)y + \frac{1}{2}w''(\alpha)y^2 + o(y^2) \right] - \\ & - (\alpha^2 + 2\alpha y + y^2)(w(\beta) - w(\alpha)) = \\ &= (\beta^2 - \alpha^2) \left[ w'(\alpha)y + \frac{1}{2}w''(\alpha)y^2 \right] - (2\alpha y + y^2)(w(\beta) - w(\alpha)) + o(u^3) = \\ &= (u - y)uy(w'(\alpha) - \alpha w''(\alpha)) + o(u^3), \end{aligned}$$

poiché i termini del secondo ordine in  $u$  si cancellano. Ottengo quindi che

$$\begin{aligned} q\pi &= \lim_{u \rightarrow 0} I(\alpha, \alpha + u) = \frac{\sqrt{w'(\alpha)}}{\sqrt{w'(\alpha) - \alpha w''(\alpha)}} \lim_{u \rightarrow 0} \int_0^u \frac{dy}{\sqrt{uy - y^2}} (1 + o(1)) = \\ &= \frac{\pi \sqrt{w'(\alpha)}}{\sqrt{w'(\alpha) - \alpha w''(\alpha)}}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

infatti, usando il cambio di variabili  $x = \sqrt{uy - y^2}$  su  $[0, u/2]$ , si ha

$$\int_0^u \frac{dy}{\sqrt{uy - y^2}} = \frac{2}{u} \int_{-u/2}^{u/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - 4\frac{x^2}{u^2}}} = \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} = \pi,$$

quindi l'ultimo integrale è indipendente da  $u$ . Elevando al quadrato la (3.40) si ottiene che  $w$  deve soddisfare l'equazione differenziale

$$q^2 \alpha w''(\alpha) + (1 - q^2) w'(\alpha) = 0. \quad (3.41)$$

Dalla (3.33) si ottiene l'equazione a variabili separate

$$q^2 z \psi'(z) + (1 - q^2) \psi(z) = 0. \quad (3.42)$$

Se  $q^2 = 1$ , dalla (3.42) si ha  $\psi(z) = A$  e dunque

$$w(z) = 2Az + B, \quad (3.43)$$

con  $A, B$  costanti di integrazione ( $A > 0$ ). Se  $q^2 \neq 1$ , ponendo  $\sigma = 1/q^2$  abbiamo

$$\log \psi = \log z^{1-\sigma} + \log A, \quad A > 0$$

e, passando agli esponenziali,  $\psi(z) = Az^{1-\sigma}$ , per cui

$$w(z) = \frac{2A}{2-\sigma} z^{2-\sigma} + B, \quad B \in \mathbb{R}, \quad (3.44)$$

che per  $\sigma = 1$  si riduce alla (3.43).

Secondo passo: sostituendo l'espressione (3.44) di  $w(z)$  in (3.39) si ha

$$I(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{\beta^{2-\sigma} - \alpha^{2-\sigma}}}{\sqrt{\alpha^2 \beta^{2-\sigma} - \beta^2 \alpha^{2-\sigma} + (\beta^2 - \alpha^2) z^{2-\sigma} - z^2 (\beta^{2-\sigma} - \alpha^{2-\sigma})}} dz. \quad (3.45)$$

A questo punto passiamo al limite per  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\beta \rightarrow 1$  in (3.45). Osserviamo che in entrambi i casi  $\alpha, \beta$  possono assumere tutti i valori reali con  $0 < \alpha < \beta < 1$ . Infatti,

$$\mathcal{W}_k(z) = - \int \phi_k(z) dz = z^2 \left[ \frac{1}{2} - \frac{Az^{-\sigma}}{k^2(2-\sigma)} \right]$$

e scelti arbitrariamente  $\alpha, \beta$  con  $0 < \alpha < \beta < 1$ , possiamo trovare dei valori di  $k^2, h$  tali che

$$\begin{aligned}\frac{h}{2} - \mathcal{W}_k(\alpha) &= \frac{h}{2} - \mathcal{W}_k(\beta) = 0, \\ \frac{h}{2} - \mathcal{W}_k(z) &> 0 \quad \text{se } z \in (\alpha, \beta), \\ \mathcal{W}'_k(\alpha) &< 0 < \mathcal{W}'_k(\beta).\end{aligned}$$

Distinguiamo due casi: a)  $2 - \sigma > 0$ ; b)  $2 - \sigma < 0$ . Nel caso a), usando la sostituzione  $\zeta = z^{\sigma/2}$ , otteniamo

$$q\pi = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z^{2-\sigma}(1-z^\sigma)}} = 2q^2 \int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = q^2\pi,$$

quindi  $q = 1$ ,  $\psi(z) = A$  ed  $f(\rho) = -A/\rho^2$ . Nel caso b) invece

$$q\pi = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{\pi}{2},$$

quindi  $q = \frac{1}{2}$ ,  $\psi(z) = Az^{-3}$  ed  $f(\rho) = -A\rho$ .

□

### 3.8 Esercizi

**Esercizio 10.** *Si consideri un punto materiale  $P$  di massa  $m$  libero di muoversi in un campo di forze centrali con energia potenziale*

$$\mathcal{V}(\rho) = k \arctan \rho,$$

dove  $k > 0$  è una costante e  $\rho$  è la distanza di  $P$  dal centro di forze.

1. Detto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  il vettore delle coordinate del punto  $P$ , scrivere esplicitamente l'espressione della forza centrale  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ .
2. Dimostrare che per ogni valore  $c \neq 0$  della componente del momento angolare ortogonale al piano del moto esiste un'unica traiettoria circolare.
3. Disegnare il ritratto di fase nel piano delle fasi ridotto con coordinate  $\rho, \dot{\rho}$ ;
4. Trovare il valore  $h$  dell'energia totale  $E$  tale che le traiettorie sono illimitate se e solo se  $E \geq h$ .

**Esercizio 11.** Si consideri un punto materiale  $P$  di massa  $m$  libero di muoversi in un campo di forze centrali con energia potenziale

$$\mathcal{V}(\rho) = k \log\left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right),$$

dove  $k, r > 0$  sono due costanti e  $\rho$  è la distanza di  $P$  dal centro di forze.

- 1) Detto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  il vettore delle coordinate del punto  $P$ , scrivere esplicitamente l'espressione della forza centrale  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ .

Consideriamo condizioni iniziali per cui

$$c = 2r\sqrt{km},$$

dove  $c$  è la componente del momento angolare ortogonale al piano del moto.

- 2) Mostrare che esiste un'unica traiettoria circolare e trovarne il valore del raggio in funzione di  $r$ .
- 3) Disegnare il ritratto di fase nel piano delle fasi ridotto con coordinate  $\rho, \dot{\rho}$ .
- 4) Trovare il valore minimo  $h_{\min}$  dell'energia totale.

**Esercizio 12.** Si consideri il problema di Keplero nel caso di momento angolare nullo. Abbiamo quindi dei moti unidimensionali  $t \mapsto \rho(t) \in \mathbb{R}^+$  definiti da

$$m\ddot{\rho} = -\frac{k}{\rho^2}, \quad \rho_0 = \rho(0), \dot{\rho}_0 = \dot{\rho}(0),$$

con  $m, k$  costanti positive e  $\rho_0 \in \mathbb{R}^+, \dot{\rho}_0 \in \mathbb{R}$  le condizioni iniziali. Descrivere tali moti al variare del segno dell'energia totale  $E$  e della velocità iniziale  $\dot{\rho}_0$ .

# Capitolo 4

## Sistemi di riferimento in moto relativo

Mostriamo come cambiano la velocità e l'accelerazione di un punto materiale rispetto a sistemi di riferimento diversi, in moto relativo tra loro. A tal fine introduciamo il vettore velocità angolare e le sue proprietà.

### 4.1 Velocità angolare e formule di Poisson

Consideriamo due sistemi di riferimento

$$\Sigma = O \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3, \quad \Sigma' = O' \hat{e}'_1 \hat{e}'_2 \hat{e}'_3$$

nello spazio euclideo  $\mathbb{E}^3$ . Le terne di vettori  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$  e  $\{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\}$  dei sistemi di riferimento formano due basi  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  dello spazio vettoriale  $\mathbb{V}^3$  associato ad  $\mathbb{E}^3$ . Pertanto, ad ogni vettore  $\vec{u} \in \mathbb{V}^3$  possiamo associare in modo unico le sue rappresentazioni in tali basi

$$\vec{u} = \sum_{h=1}^3 u_h \hat{e}_h = \sum_{h=1}^3 u'_h \hat{e}'_h.$$

Data una mappa vettoriale

$$t \mapsto \vec{u}(t) \in \mathbb{V}^3,$$

definita in  $\mathbb{R}$  o in un suo intervallo, se i coefficienti  $u_h, u'_h$  di  $\vec{u}$  nelle basi  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  sono derivabili rispetto al tempo, definiamo le derivate temporali di  $\vec{u}$  nei sistemi di riferimento  $\Sigma$  e  $\Sigma'$  come

$$\left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{\Sigma} = \sum_{h=1}^3 \dot{u}_h \hat{e}_h, \quad \left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{\Sigma'} = \sum_{h=1}^3 \dot{u}'_h \hat{e}'_h.$$

**Proposizione 15.** *Se le coordinate di  $\hat{e}'_h$  in  $\Sigma$  sono funzioni derivabili del tempo  $t$  allora esiste un'unica mappa  $t \mapsto \vec{\omega}(t) \in \mathbb{V}^3$ , tale che*

$$\left. \frac{d\hat{e}'_h}{dt} \right|_{\Sigma} = \vec{\omega} \times \hat{e}'_h, \quad h = 1, 2, 3. \quad (4.1)$$

Le relazioni (4.1) si chiamano **formule di Poisson** e il vettore  $\vec{\omega}(t)$  si dice **velocità angolare** di  $\Sigma'$  rispetto a  $\Sigma$  al tempo  $t$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo la matrice  $R$  di cambiamento di base da  $\mathcal{B}' = \{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\}$  a  $\mathcal{B} = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ , con componenti  $R_{ji} = \hat{e}'_i \cdot \hat{e}_j$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ . Poichè

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \hat{e}'_i \cdot \hat{e}'_j = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq 3,$$

la matrice  $R = (R_{jh})$  è ortogonale, cioè soddisfa la relazione

$$RR^T = I = R^T R.$$

Inoltre le terne che formano  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$  sono entrambe levogire, per cui  $\det R = 1$ , cioè

$$R \in SO(3).$$

Siano inoltre  $e_h \in \mathbb{R}^3$  i vettori della base canonica, che rappresentano  $\hat{e}_h$  nella base  $\mathcal{B}$  ed  $e'_h \in \mathbb{R}^3$  i vettori delle componenti di  $\hat{e}'_h$  in  $\mathcal{B}$ . Valgono le relazioni

$$e'_h = R e_h, \quad j = 1, 2, 3.$$

Il vettore

$$\left. \frac{d\hat{e}'_h}{dt} \right|_{\Sigma}$$

è rappresentato da  $\dot{e}'_h \in \mathbb{R}^3$  nella base  $\mathcal{B}$ , cioè dal vettore delle derivate temporali delle componenti di  $\hat{e}'_h$ . Dalla relazione  $R^T R = I$  si ottiene

$$\dot{e}'_h = \dot{R} e_h = \dot{R} R^T R e_h = \dot{R} R^T e'_h.$$

La matrice  $\dot{R} R^T$  è antisimmetrica, infatti derivando  $R R^T = I$  rispetto a  $t$  si ottiene

$$\dot{R} R^T + R \dot{R}^T = \dot{R} R^T + (\dot{R} R^T)^T = 0.$$

Data una matrice antisimmetrica  $A$ , esiste un unico vettore  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$  tale che

$$A\mathbf{u} = \mathbf{a} \times \mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3. \quad (4.2)$$

La relazione tra le componenti di  $A$  e quelle di  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$  è la seguente:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Concludo che esiste un unico vettore  $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$ , associato alla matrice  $\dot{R}R^T$ , tale che

$$\dot{\mathbf{e}}'_h = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_h, \quad h = 1, 2, 3.$$

Il vettore  $\vec{\boldsymbol{\omega}} = \sum_{h=1}^3 \omega_h \hat{\mathbf{e}}_h \in \mathbb{V}^3$ , rappresentato da  $\boldsymbol{\omega}$  in  $\mathcal{B}$ , soddisfa la (4.1). Infatti se  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  rappresentano  $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$  in  $\mathcal{B}$ , allora  $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$  è rappresentato da  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ :

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} &= \sum_{i=1}^3 a_i \hat{\mathbf{e}}_i \times \sum_{j=1}^3 b_j \hat{\mathbf{e}}_j = \sum_{i,j=1}^3 a_i b_j \hat{\mathbf{e}}_i \times \hat{\mathbf{e}}_j = \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq 3} (a_i b_j - a_j b_i) \hat{\mathbf{e}}_i \times \hat{\mathbf{e}}_j = \sum_{h=1}^3 (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_h \hat{\mathbf{e}}_h. \end{aligned} \quad (4.3)$$

L'unicità di  $\vec{\boldsymbol{\omega}}$  si dimostra per assurdo. Se esistessero  $\vec{\boldsymbol{\omega}}_1, \vec{\boldsymbol{\omega}}_2$  che soddisfano le (4.1), allora si avrebbe  $(\vec{\boldsymbol{\omega}}_1 - \vec{\boldsymbol{\omega}}_2) \times \hat{\mathbf{e}}'_h = \vec{\mathbf{0}}$  per  $h = 1, 2, 3$ . Quindi  $\vec{\boldsymbol{\omega}}_1 = \vec{\boldsymbol{\omega}}_2$ .  $\square$

**Esercizio 13.** Per ogni  $\vec{\mathbf{a}} \in \mathbb{V}^3$  l'applicazione lineare

$$\mathbb{V}^3 \ni \vec{\mathbf{u}} \mapsto \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{V}^3$$

ha un nucleo di dimensione dispari.

**Proposizione 16.** Una formula esplicita per la velocità angolare è data da

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^3 \dot{\mathbf{e}}'_h \times \left. \frac{d\dot{\mathbf{e}}'_h}{dt} \right|_{\Sigma} \quad (4.4)$$

*Dimostrazione.* Usando le formule di Poisson (4.1) si ha

$$\sum_{h=1}^3 \dot{\mathbf{e}}'_h \times \left. \frac{d\dot{\mathbf{e}}'_h}{dt} \right|_{\Sigma} = \sum_{h=1}^3 \dot{\mathbf{e}}'_h \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \dot{\mathbf{e}}'_h) = \sum_{h=1}^3 [\vec{\boldsymbol{\omega}} - (\vec{\boldsymbol{\omega}} \cdot \dot{\mathbf{e}}'_h) \dot{\mathbf{e}}'_h] = 2\vec{\boldsymbol{\omega}}.$$

$\square$

**Esempio 2.** Siano  $\Sigma = O \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$ ,  $\Sigma' = O \hat{e}'_1 \hat{e}'_2 \hat{e}'_3$  due sistemi di riferimento con la stessa origine  $O$ . Assumiamo che  $\Sigma'$  ruoti attorno all'asse  $O\hat{e}_3$  di  $\Sigma$  in modo che i vettori  $\hat{e}'_1$  e  $\hat{e}_1$  formino un angolo  $\theta(t)$ . Calcoliamo la velocità angolare di  $\Sigma'$  rispetto a  $\Sigma$ .

Abbiamo che

$$\hat{e}'_1 = \cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2, \quad \hat{e}'_2 = -\sin \theta \hat{e}_1 + \cos \theta \hat{e}_2, \quad \hat{e}'_3 = \hat{e}_3. \quad (4.5)$$

Derivando le (4.5) rispetto a  $t$  ed applicando (4.4) si ottiene che

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{e}_3.$$

#### 4.1.1 Derivata temporale di un vettore in riferimenti diversi

Mostriamo la relazione tra le derivate temporali di una stessa mappa vettoriale eseguite in due riferimenti diversi.

**Proposizione 17.** *Data una mappa vettoriale  $t \mapsto \vec{u}(t) \in \mathbb{V}^3$ , definita in  $\mathbb{R}$  o in un suo intervallo e derivabile in due riferimenti  $\Sigma, \Sigma'$ , vale la relazione*

$$\left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{\Sigma} = \left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times \vec{u}. \quad (4.6)$$

*Dimostrazione.* Osserviamo innanzitutto che, poiché  $\hat{e}'_i = \sum_j R_{ji} \hat{e}_j$ ,

$$\vec{u} = \sum_i u'_i \hat{e}'_i = \sum_i u'_i \sum_j R_{ji} \hat{e}_j = \sum_j \left( \sum_i u'_i R_{ji} \right) \hat{e}_j,$$

dove le somme su  $i$  e  $j$  si intendono da 1 a 3. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{\Sigma} &= \sum_j \frac{d}{dt} \left( \sum_i u'_i R_{ji} \right) \hat{e}_j = \sum_j \sum_i \left( \dot{u}'_i R_{ji} + u'_i \dot{R}_{ji} \right) \hat{e}_j = \\ &= \sum_i \dot{u}'_i \left( \sum_j R_{ji} \hat{e}_j \right) + \sum_i u'_i \left( \sum_j \dot{R}_{ji} \hat{e}_j \right) = \left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{\Sigma'} + \sum_i u'_i \left. \frac{d\hat{e}'_i}{dt} \right|_{\Sigma} = \\ &= \left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{\Sigma'} + \sum_i u'_i \vec{\omega} \times \hat{e}'_i = \left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times \vec{u}. \end{aligned}$$

□

**Osservazione 12.** Dalla (4.6) segue che la derivata temporale di  $\vec{\omega}$  in  $\Sigma$  ed in  $\Sigma'$  coincidono. Per questo motivo in seguito scriveremo anche  $\dot{\vec{\omega}}$  al posto di  $\left. \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|_{\Sigma}$  e di  $\left. \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|_{\Sigma'}$ .

Se  $\mathbf{u}, \mathbf{u}'$  sono le coordinate del vettore  $\vec{u} \in \mathbb{V}^3$  nelle basi  $\mathcal{B} = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ ,  $\mathcal{B}' = \{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\}$  rispettivamente, ed  $R \in SO(3)$  è la matrice di cambiamento di base da  $\mathcal{B}'$  a  $\mathcal{B}$ , vale la relazione  $\mathbf{u} = R\mathbf{u}'$  e possiamo scrivere<sup>1</sup>

$$\dot{\mathbf{u}} = R\dot{\mathbf{u}}' + \boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{u}',$$

in cui  $\boldsymbol{\omega}$  è il vettore delle coordinate di  $\vec{\omega}$  in  $\mathcal{B}$ .

### 4.1.2 Composizione di velocità angolari

Consideriamo tre sistemi di riferimento in  $\mathbb{E}^3$ :

$$\Sigma = O \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3, \quad \Sigma' = O' \hat{e}'_1 \hat{e}'_2 \hat{e}'_3, \quad \Sigma'' = O'' \hat{e}''_1 \hat{e}''_2 \hat{e}''_3.$$

**Proposizione 18.** Se  $\vec{\omega}'$  è la velocità angolare di  $\Sigma'$  rispetto a  $\Sigma$  e se  $\vec{\omega}''$  è la velocità angolare di  $\Sigma''$  rispetto a  $\Sigma'$ , allora la velocità angolare  $\vec{\omega}$  di  $\Sigma''$  rispetto a  $\Sigma$  è data dalla somma  $\vec{\omega}' + \vec{\omega}''$ .

*Dimostrazione.* Usando la (4.6) e le formule di Poisson si ha, per  $h = 1, 2, 3$ ,

$$\vec{\omega} \times \hat{e}''_h = \left. \frac{d\hat{e}''_h}{dt} \right|_{\Sigma} = \left. \frac{d\hat{e}''_h}{dt} \right|_{\Sigma'} + \vec{\omega}' \times \hat{e}''_h = (\vec{\omega}'' + \vec{\omega}') \times \hat{e}''_h.$$

Si conclude usando l'unicità della velocità angolare. □

## 4.2 Equazione del moto in riferimenti diversi

Scriviamo le formule che legano la velocità  $\vec{v}$  e l'accelerazione  $\vec{a}$  di un punto materiale  $P$  in un sistema di riferimento  $\Sigma = O \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$  alla velocità  $\vec{v}'$  e all'accelerazione  $\vec{a}'$  relative ad un altro riferimento  $\Sigma' = O' \hat{e}'_1 \hat{e}'_2 \hat{e}'_3$ , in moto con velocità angolare  $\vec{\omega}$  rispetto a  $\Sigma$ .

---

<sup>1</sup>Non deve confondere il fatto che si abbia  $\mathbf{e}'_h = R\mathbf{e}_h$  e  $\mathbf{u} = R\mathbf{u}'$ . Infatti  $\mathbf{e}_h, \mathbf{e}'_h$  sono le coordinate in  $\mathcal{B}$  di due vettori diversi di  $\mathbb{V}^3$ , mentre  $\mathbf{u}, \mathbf{u}'$  sono le coordinate in  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  dello stesso vettore  $\vec{u}$ .

**Proposizione 19.** Valgono le relazioni

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}^T, \quad (4.7)$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}^T + \vec{a}^C, \quad (4.8)$$

in cui

$$\begin{aligned} \vec{v}^T &= \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times (P - O'), \\ \vec{a}^T &= \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (P - O')) + \dot{\vec{\omega}} \times (P - O'), \\ \vec{a}^C &= 2\vec{\omega} \times \vec{v}' \end{aligned}$$

dove  $\vec{v}_{O'}$ ,  $\vec{a}_{O'}$  sono la velocità e l'accelerazione di  $O'$  in  $\Sigma$ .

*Dimostrazione.* Per ricavare le formule precedenti scriviamo

$$P - O = (P - O') + (O' - O).$$

Derivando rispetto a  $t$  in  $\Sigma$  e usando la (4.6) si ha

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \left. \frac{d(P - O')}{dt} \right|_{\Sigma} + \left. \frac{d(O' - O)}{dt} \right|_{\Sigma} = \left. \frac{d(P - O')}{dt} \right|_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times (P - O') + \vec{v}_{O'} \\ &= \vec{v}' + \vec{\omega} \times (P - O') + \vec{v}_{O'}, \end{aligned}$$

che corrisponde alla (4.7). Derivando ancora e usando la (4.6) si ottiene<sup>2</sup>

$$\vec{a} = \left. \frac{d\vec{v}'}{dt} \right|_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \dot{\vec{\omega}} \times (P - O') + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (P - O')) + \vec{a}_{O'},$$

da cui segue la (4.8). □

I termini  $\vec{a}^T$  e  $\vec{a}^C$  si chiamano rispettivamente **accelerazione di trascinamento** e **accelerazione di Coriolis**. Il termine  $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (P - O'))$  si chiama **accelerazione centripeta**. In coordinate nella base  $\mathcal{B}$  abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= R\mathbf{x}' + \mathbf{x}_{O'}, \\ \dot{\mathbf{x}} &= R\dot{\mathbf{x}}' + \dot{\mathbf{x}}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}', \\ \ddot{\mathbf{x}} &= R\ddot{\mathbf{x}}' + \ddot{\mathbf{x}}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}') + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times R\mathbf{x}' + 2\boldsymbol{\omega} \times R\dot{\mathbf{x}}' \end{aligned}$$

in cui  $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$  è il vettore delle coordinate di  $(P - O')$  in  $\mathcal{B}'$ .

Se l'equazione del moto di un punto materiale  $P$  di massa  $m$  in un riferimento  $O \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$  si scrive

$$m\vec{a} = \vec{F}(P - O, \vec{v}, t),$$

<sup>2</sup>usiamo la relazione  $\left. \frac{d(\vec{u} \times \vec{v})}{dt} \right|_{\Sigma} = \left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{\Sigma} \times \vec{v} + \vec{u} \times \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\Sigma}$ , che segue dalla (4.3).

allora nel riferimento  $O'\hat{e}'_1\hat{e}'_2\hat{e}'_3$  possiamo scrivere

$$m\vec{a}' = \vec{F}((P - O') + (O' - O), \vec{v}' + \vec{v}^T, t) - m\vec{a}^T - m\vec{a}^C.$$

In coordinate nella base  $\mathcal{B}$  l'ultima equazione diventa

$$\begin{aligned} mR\ddot{\mathbf{x}}' &= \mathbf{F}(R\mathbf{x}' + \mathbf{x}_{O'}, R\dot{\mathbf{x}}' + \dot{\mathbf{x}}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}', t) \\ &\quad - m(\ddot{\mathbf{x}}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}') + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times R\mathbf{x}') - 2m\boldsymbol{\omega} \times R\dot{\mathbf{x}}'. \end{aligned}$$

### 4.3 Deviazione dei gravi in caduta libera

Si consideri un sistema di riferimento  $\Sigma = Oxyz$ , avente per origine il centro della Terra. Studiamo il moto di un punto materiale  $P$  in un sistema di riferimento solidale alla Terra, assumendo che questa abbia forma sferica e che ruoti attorno all'asse  $Oz$  con velocità angolare  $\vec{\omega}$  costante. In prima approssimazione la forza di attrazione gravitazionale esercitata dal Sole sul punto materiale è bilanciata dalla forza centrifuga del moto di rivoluzione della Terra attorno al Sole.

Dato un sistema di riferimento  $\Sigma' = O'\xi\eta\zeta$  solidale alla Terra, con l'origine  $O'$  sulla superficie terrestre, l'accelerazione  $\vec{a}'$  relativa a  $\Sigma'$  è data da

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}^T - \vec{a}^C,$$

dove

$$\vec{a} = \vec{g}, \quad \vec{a}^T = \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (P - O')), \quad \vec{a}^C = 2\vec{\omega} \times \vec{v}',$$

con  $\vec{g}$  costante in  $\Sigma'$ . Inoltre

$$\vec{a}_{O'} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (O' - O)), \tag{4.9}$$

infatti  $O, O'$  sono fissi in  $\Sigma'$ , per cui (4.9) segue applicando la formula (4.6) nel calcolo della derivata prima e seconda di  $O' - O$  rispetto a  $t$  in  $\Sigma$ , e tenendo conto che  $O' - O$  è costante in  $\Sigma'$ , oppure da

$$\vec{a}_O = \vec{a}'_O + \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (O - O')] + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'_O$$

e da  $\vec{a}_O = \vec{a}'_O = \vec{v}'_O = \vec{0}$ . Siccome  $P - O'$  è molto più piccolo di  $O' - O$  posso trascurare il termine  $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (P - O'))$  quindi

$$\vec{a}' = \vec{g} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (O' - O)) - 2\vec{\omega} \times \vec{v}'.$$

Poniamo

$$\vec{g}_{O'} = \vec{g} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (O' - O)),$$

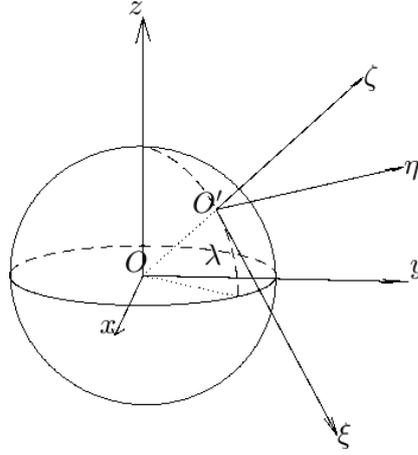


Figura 4.1: Il riferimento  $O'\xi\eta\zeta$  in cui si studia il moto del grave.

che è l'accelerazione di gravità locale, dipendente dalla latitudine. Possiamo orientare il riferimento  $\Sigma'$  nel modo seguente: scelgo l'asse  $O'\zeta$  lungo la direzione della gravità locale, l'asse  $O'\xi$  parallelo al piano del meridiano, diretto verso l'equatore, e l'asse  $O'\eta$  in modo tale che i versori di  $O'\xi\eta\zeta$  formino una terna levogira, vedi Figura 4.1. Approssimiamo la gravità locale con  $\vec{g}$ , trascurando<sup>3</sup> il termine  $-\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (O' - O))$ . Con queste approssimazioni l'equazione del moto per il punto  $P$  in  $\Sigma'$  diventa quindi

$$\frac{d^2}{dt^2}(P - O')|_{\Sigma'} = \vec{g} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}'. \quad (4.10)$$

Indicando con  $\lambda$  la latitudine di  $O'$  e usando le coordinate  $\xi, \eta, \zeta$ , l'equazione (4.10) si scrive

$$\ddot{\xi} = 2\omega \sin \lambda \dot{\eta}, \quad \ddot{\eta} = -2\omega \sin \lambda \dot{\xi} - 2\omega \cos \lambda \dot{\zeta}, \quad \ddot{\zeta} = -g + 2\omega \cos \lambda \dot{\eta}, \quad (4.11)$$

infatti

$$\vec{\omega} = \omega(-\cos \lambda \hat{e}_\xi + \sin \lambda \hat{e}_\zeta),$$

dove  $\hat{e}_\xi, \hat{e}_\zeta$  sono i versori degli assi  $O'\xi, O'\zeta$ .

Considero per queste equazioni le condizioni iniziali

$$\xi(0) = \eta(0) = \zeta(0) = \dot{\xi}(0) = \dot{\eta}(0) = \dot{\zeta}(0) = 0. \quad (4.12)$$

<sup>3</sup>Osserviamo che la norma della velocità angolare del moto di rotazione della Terra è  $\omega = \frac{2\pi}{86400} \text{s}^{-1}$  e la misura del raggio equatoriale della Terra è  $R_\oplus \approx 6378 \text{ Km}$ . Stimiamo la norma del termine trascurato con  $\omega^2 R_\oplus \approx 0.03373 \text{ ms}^{-2}$ , che è più piccolo di due ordini di grandezza del valore della accelerazione di gravità  $g \approx 9.81 \text{ ms}^{-2}$ .

La soluzione del problema di Cauchy lineare dato da (4.11), (4.12) si potrebbe scrivere esplicitamente. Comunque possiamo semplificare i conti facendo un'ulteriore approssimazione. Integrando rispetto al tempo la prima e la terza equazione in (4.11) e sostituendo le risultanti espressioni di  $\xi, \zeta$  nella seconda si ottiene

$$\ddot{\eta} = -4\omega^2\eta + 2g\omega t \cos \lambda.$$

Trascurando il termine con  $\omega^2$  e integrando si ottiene

$$\eta(t) = \frac{1}{3}g\omega t^3 \cos \lambda.$$

Questa formula ci dice che un grave in caduta libera sulla Terra è soggetto a deviazione verso Est.

## 4.4 Esercizi

**Esercizio 14.** Si fissi un riferimento  $\Sigma = O \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$  e si consideri un altro riferimento  $\Sigma' = O' \hat{e}'_1 \hat{e}'_2 \hat{e}'_3$  tale che

$$O' - O = \frac{1}{2}\alpha t^2 \hat{e}_1, \quad \vec{\omega} = \omega \hat{e}_3,$$

dove  $\vec{\omega}$  è la velocità angolare angolare di  $\Sigma'$  rispetto a  $\Sigma$  ed  $\alpha, \omega$  sono costanti positive.

Date le coordinate  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ,  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$  della velocità  $\vec{v}$  e dell'accelerazione  $\vec{a}$  di un punto materiale  $P$  nella base  $\mathcal{B} = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ , si scrivano le coordinate nella stessa base della velocità  $\vec{v}'$  e dell'accelerazione  $\vec{a}'$  di  $P$  relative a  $\Sigma'$ .



# Capitolo 5

## Dinamica dei sistemi di $N$ punti materiali liberi

Studiamo il moto di un sistema di  $N$  punti materiali liberi nello spazio tridimensionale. Introduciamo il baricentro del sistema e descriviamo le sue proprietà. Distinguiamo tra forze interne ed esterne e mostriamo che le prime sono sempre conservative. Parliamo inoltre dei sistemi di vettori applicati equivalenti e di quelli equilibrati.

### 5.1 Quantità dinamiche per $N$ punti materiali

Consideriamo un sistema di punti materiali  $P_i$  di massa  $m_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , su cui agiscono le forze  $\vec{F}_i$  nel sistema di riferimento  $\Sigma = O \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$ . Siano  $\vec{x}_i, \vec{v}_i, \vec{a}_i$  la posizione, la velocità e l'accelerazione di  $P_i$  relative a  $\Sigma$ . Siano inoltre  $\mathbf{F}_j, \mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^3$  le coordinate di questi vettori in  $\Sigma$ . Introduciamo le seguenti quantità, utili a descrivere la dinamica degli  $N$  punti nel loro insieme:

QUANTITÀ DI MOTO TOTALE (MOMENTO LINEARE)

$$\vec{p} = \sum_{j=1}^N \vec{p}_j = \sum_{j=1}^N m_j \vec{v}_j.$$

MOMENTO ANGOLARE RISPETTO A UN POLO  $Q$

$$\vec{M}_Q = \sum_{j=1}^N (P_j - Q) \times m_j \vec{v}_j.$$

ENERGIA CINETICA

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j |\vec{v}_j|^2.$$

RISULTANTE DELLE FORZE  $\vec{F}_j$

$$\vec{R} = \sum_{j=1}^N \vec{F}_j.$$

MOMENTO RISULTANTE DELLE FORZE  $\vec{F}_j$  RISPETTO A UN POLO  $Q$

$$\vec{N}_Q = \sum_{j=1}^N (P_j - Q) \times \vec{F}_j.$$

POTENZA RISULTANTE DELLE FORZE  $\vec{F}_j$

$$\Pi = \sum_{j=1}^N \vec{F}_j \cdot \vec{v}_j = \sum_{j=1}^N F_j \cdot v_j.$$

## 5.2 Teoremi di scomposizione relativi al baricentro

Introduciamo la massa totale

$$m = \sum_{j=1}^N m_j$$

e il baricentro  $B \in \mathbb{E}^3$  degli  $N$  punti materiali, definito da

$$m(B - Q) = \sum_{j=1}^N m_j(P_j - Q), \quad (5.1)$$

dove  $Q \in \mathbb{E}^3$  è un punto scelto a piacere.

Osserviamo che la definizione di  $B$  non dipende dalla scelta di  $Q$  infatti, scelto  $Q' \neq Q$  e definito  $B'$  tramite la relazione

$$m(B' - Q') = \sum_{j=1}^N m_j(P_j - Q')$$

si ha

$$\begin{aligned} B' - Q' &= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^N m_j(P_j - Q') = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^N m_j(P_j - Q) + (Q - Q') \\ &= (B - Q) + (Q - Q') = B - Q', \end{aligned}$$

per cui  $B' = B$ .

**Definizione 6.** *Il sistema di riferimento  $\Sigma_B$ , centrato in  $B$  e orientato come  $\Sigma$ , si chiama riferimento del baricentro.*

Nel seguito di questa sezione scriveremo i risultati in coordinate nel riferimento  $\Sigma$ .

## Rappresentazione della quantità di moto

Dalla (5.1), scegliendo come polo  $Q$  l'origine  $O$  del sistema di riferimento, segue subito che la quantità di moto totale corrisponde a quella di un punto avente massa totale  $m$ , che si muove come il baricentro del sistema:

$$\mathbf{p} = \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{v}_j = m \mathbf{v}_B. \quad (5.2)$$

**Proposizione 20.** *(Teorema del centro di massa) Il baricentro di un sistema di  $N$  punti si muove come un punto materiale di massa  $m$  su cui agisce la risultante  $\mathbf{R}$  delle forze che agiscono sui singoli punti:*

$$m \ddot{\mathbf{x}}_B = \mathbf{R}. \quad (5.3)$$

*Dimostrazione.* Valutando la (5.2) lungo le soluzioni delle equazioni di Newton e derivando rispetto al tempo si ottiene

$$m \ddot{\mathbf{x}}_B = \sum_{j=1}^N m_j \ddot{\mathbf{x}}_j = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j.$$

□

## Scomposizione del momento angolare rispetto a un polo $Q$

Il momento angolare totale rispetto ad un polo  $Q \in \mathbb{E}^3$  si può scomporre come somma di due componenti

$$\mathbf{M}_Q = (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times m \mathbf{v}_B + \mathbf{M}^{(B)}, \quad \mathbf{M}^{(B)} = \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times m_j (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_B). \quad (5.4)$$

La prima corrisponde al momento angolare rispetto a  $Q$  di un punto di massa  $m$  che si muove come il baricentro del sistema. La seconda corrisponde al momento angolare nel sistema nel riferimento del baricentro e non dipende dalla scelta del polo  $Q$ .

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_Q &= \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times m_j \mathbf{v}_j + \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times m_j \mathbf{v}_j = \\ &= \mathbf{M}_B + (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times m \mathbf{v}_B.\end{aligned}$$

Inoltre

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{M}^{(B)} + \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times m_j \mathbf{v}_B$$

e si ha

$$\sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times m_j \mathbf{v}_B = \sum_{j=1}^N m_j (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times \mathbf{v}_B = m (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_B) \times \mathbf{v}_B = \mathbf{0}.$$

□

**Osservazione 13.** *Nel riferimento del baricentro il momento angolare non dipende dalla scelta del polo. Infatti in tale riferimento vale la relazione*

$$\sum_{j=1}^N m_j \mathbf{v}_j = m \mathbf{v}_B = \mathbf{0}$$

e quindi, se  $Q, Q' \in \mathbb{E}^3$  con  $Q \neq Q'$ , si ha

$$\mathbf{M}_Q = \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_Q) \times m_j \mathbf{v}_j + (\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_{Q'}) \times \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{Q'}) \times m_j \mathbf{v}_j = \mathbf{M}_{Q'}.$$

## Scomposizione del momento risultante delle forze rispetto a un polo $Q$

Il momento risultante delle forze rispetto ad un polo  $Q \in \mathbb{E}^3$  si può scomporre come somma di due componenti

$$\mathbf{N}_Q = (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times \mathbf{R} + \mathbf{N}^{(B)}, \quad \mathbf{N}^{(B)} = \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times (\mathbf{F}_j - m_j \mathbf{a}_B) \quad (5.5)$$

la prima corrisponde al momento rispetto al polo  $Q$  della forza risultante  $\mathbf{R}$  agente su un punto di massa  $m$  che si muove come il baricentro  $B$  del sistema. La seconda corrisponde al momento risultante delle forze nel riferimento del baricentro<sup>1</sup> e non dipende dalla scelta del polo  $Q$ .

<sup>1</sup>in questo riferimento alle forze  $\mathbf{F}_j$  agenti sui punti  $P_j$  si aggiungono le forze di trascinamento  $-m_j \mathbf{a}_B$ .

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_Q &= \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times \mathbf{F}_j + \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times \mathbf{F}_j = \\ &= \mathbf{N}_B + (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times \mathbf{R}.\end{aligned}$$

Inoltre

$$\mathbf{N}_B = \mathbf{N}^{(B)} + \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times m_j \mathbf{a}_B$$

e si ha

$$\sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times m_j \mathbf{a}_B = \sum_{j=1}^N m_j (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times \mathbf{a}_B = m (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_B) \times \mathbf{a}_B = 0.$$

□

**Osservazione 14.** *Nel riferimento del baricentro, lungo le soluzioni delle equazioni di Newton, il momento risultante delle forze non dipende dalla scelta del polo. Infatti, in queste ipotesi, vale la relazione*

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j = \sum_{j=1}^N m_j \ddot{\mathbf{x}}_j = m \ddot{\mathbf{x}}_B = \mathbf{0}$$

e quindi, se  $Q, Q' \in \mathbb{E}^3$  con  $Q \neq Q'$ , si ha

$$\mathbf{N}_Q = \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_Q) \times \mathbf{F}_j + (\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_{Q'}) \times \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j = \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{Q'}) \times \mathbf{F}_j = \mathbf{N}_{Q'}.$$

## Scomposizione dell'energia cinetica

L'energia cinetica del sistema si può scomporre come somma di due componenti

$$T = \frac{1}{2} m |\mathbf{v}_B|^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_B) \cdot (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_B), \quad (5.6)$$

la prima corrisponde all'energia cinetica di un punto materiale di massa  $m$  che si muove come il baricentro del sistema, la seconda corrisponde all'energia cinetica del sistema nel riferimento del baricentro. Questo risultato è noto come **teorema di König**.

*Dimostrazione.* Inserendo la relazione  $\mathbf{v}_j = (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_B) + \mathbf{v}_B$  nell'espressione dell'energia cinetica si ottiene

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_B) \cdot (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_B) + \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{v}_B \cdot (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_B) + \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^N m_j \right) \mathbf{v}_B \cdot \mathbf{v}_B.$$

Si conclude osservando che il secondo addendo a destra è nullo.  $\square$

### 5.3 Forze interne e forze esterne

Possiamo scomporre le forze  $\vec{\mathbf{F}}_i$  che agiscono sui punti  $P_i$  come somma vettoriale di due contributi:  $\vec{\mathbf{F}}_i = \vec{\mathbf{F}}_i^{(I)} + \vec{\mathbf{F}}_i^{(E)}$ . Il vettore  $\vec{\mathbf{F}}_i^{(I)}$  è la somma delle forze che gli altri punti del sistema esercitano su  $P_i$  e si chiama **forza interna** (agente su  $P_i$ );  $\vec{\mathbf{F}}_i^{(E)}$  è la somma delle altre forze e si chiama **forza esterna**.

Assumiamo che

$$\vec{\mathbf{F}}_i^{(E)} = \vec{\mathbf{F}}_i^{(E)}(\vec{\mathbf{x}}_i, \vec{\mathbf{v}}_i, t),$$

cioè che ogni forza esterna  $\vec{\mathbf{F}}_i^{(E)}$  dipenda solo dallo stato del punto  $P_i$ .

Sulle forze interne  $\vec{\mathbf{F}}_i^{(I)}$  facciamo le seguenti ipotesi (*forze di tipo classico*):

$$\vec{\mathbf{F}}_i^{(I)} = \vec{\mathbf{F}}_i^{(I)}(\vec{\mathbf{x}}_1, \dots, \vec{\mathbf{x}}_N) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{\mathbf{F}}_{ij}(\vec{\mathbf{x}}_i, \vec{\mathbf{x}}_j), \quad (5.7)$$

dove  $\vec{\mathbf{F}}_{ij}$  è la forza esercitata da  $P_j$  su  $P_i$ . Quindi le  $\vec{\mathbf{F}}_i^{(I)}$  sono puramente posizionali e sono la somma vettoriale di interazioni a due corpi. Assumiamo inoltre che valgano le seguenti proprietà:

- 1)  $\vec{\mathbf{F}}_{ij} + \vec{\mathbf{F}}_{ji} = \vec{\mathbf{0}}, \quad \forall i, j,$
- 2)  $\vec{\mathbf{F}}_{ij} \times \vec{\mathbf{r}}_{ij} = \vec{\mathbf{0}},$  con  $\vec{\mathbf{r}}_{ij} = \vec{\mathbf{x}}_i - \vec{\mathbf{x}}_j,$
- 3)  $\vec{\mathbf{F}}_{ij} = f_{ij}(\rho_{ij}) \frac{\vec{\mathbf{r}}_{ij}}{\rho_{ij}},$  con  $\rho_{ij} = |\vec{\mathbf{r}}_{ij}|.$

Osserviamo che le relazioni precedenti implicano che  $f_{ij} = f_{ji}$ .

**Osservazione 15.** *Queste ipotesi sulle forze sono caratteristiche della Meccanica Classica: le proprietà 1) e 2) corrispondono al principio di azione e reazione.*<sup>2</sup>

<sup>2</sup>Troviamo già negli scritti di Leonardo da Vinci un chiaro riferimento a questo principio. Nel suo *Codice sul volo degli uccelli* (1505) egli scrive: 'Tanta forza si fa con la cosa in contra all'aria, quanto l'aria contro alla cosa. Vedi l'alie percosse contro all'aria far sostenere la pesante aquila nella suprema sottile aria vicina all'elemento fuoco. Ancora vedi la mossa aria sopra'l mare, ripercossa nelle gonfiate vele, far correre la carica e pesante nave; sicché per queste dimostrative e assegnate ragioni potrai conoscere l'omo con le sue congegnate e grandi alie, facendo forza contro alla resistente aria e, vincendo, poterla soggiogare e levarsi sopra di lei'.

Con queste ipotesi si dimostra che la risultante e il momento risultante delle forze interne (rispetto a qualunque polo  $Q$ ) sono nulli. Infatti

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{R}}^{(I)} &= \sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{F}}_i^{(I)} = \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{\mathbf{F}}_{ij} = \sum_{1 \leq i < j \leq N} (\vec{\mathbf{F}}_{ij} + \vec{\mathbf{F}}_{ji}) = \vec{\mathbf{0}}, \\ \vec{\mathbf{N}}_Q^{(I)} &= \sum_{i=1}^N (P_i - Q) \times \vec{\mathbf{F}}_i^{(I)} = \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (P_i - Q) \times \vec{\mathbf{F}}_{ij} = \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq N} \left[ (P_i - Q) \times \vec{\mathbf{F}}_{ij} + (P_j - Q) \times \vec{\mathbf{F}}_{ji} \right] = \sum_{1 \leq i < j \leq N} (P_i - P_j) \times \vec{\mathbf{F}}_{ij} = \vec{\mathbf{0}}.\end{aligned}$$

## 5.4 Le equazioni cardinali

Si consideri un sistema meccanico formato da  $N$  punti materiali di massa  $m_1, \dots, m_n$ , sui quali agiscono delle forze  $\mathbf{F}_j = \mathbf{F}_j^{(I)} + \mathbf{F}_j^{(E)}$ , con forze interne  $\mathbf{F}_j^{(I)}$  di tipo classico.

**Proposizione 21.** *Sia  $\mathbf{x}(t) = (\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_N(t))$  una qualunque soluzione del sistema di equazioni di Newton*

$$m_j \ddot{\mathbf{x}}_j = \mathbf{F}_j(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t), \quad j = 1 \dots N.$$

Allora  $\mathbf{x}(t)$  risolve le seguenti equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{R}^{(E)} \\ \dot{\mathbf{M}}_Q = -\dot{\mathbf{x}}_Q \times \mathbf{p} + \mathbf{N}_Q^{(E)} \end{cases} \quad (5.8)$$

Le (5.8) si chiamano **equazioni cardinali della Dinamica**.

*Dimostrazione.* Calcolando la derivata di  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{M}_Q$  rispetto al tempo lungo le soluzioni delle equazioni di Newton si ottiene che

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}} &= m \ddot{\mathbf{x}}_B = \mathbf{R} = \mathbf{R}^{(I)} + \mathbf{R}^{(E)}, \\ \dot{\mathbf{M}}_Q &= \sum_{i=1}^N (\dot{\mathbf{x}}_i - \dot{\mathbf{x}}_Q) \times m_i \dot{\mathbf{x}}_i + \sum_{i=1}^N (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_Q) \times m_i \ddot{\mathbf{x}}_i \\ &= -\dot{\mathbf{x}}_Q \times m \dot{\mathbf{x}}_B + \mathbf{N}_Q = -\dot{\mathbf{x}}_Q \times \mathbf{p} + \mathbf{N}_Q^{(I)} + \mathbf{N}_Q^{(E)}.\end{aligned}$$

Si conclude usando le ipotesi sulle forze interne fatte nella sezione precedente, che implicano

$$\mathbf{R}^{(I)} = \mathbf{N}_Q^{(I)} = \mathbf{0}.$$

□

## 5.5 Sistemi equivalenti di vettori applicati

Un sistema di vettori applicati è un insieme  $\mathcal{S}$  della forma

$$\mathcal{S} = \{(\vec{v}_1, P_1), \dots, (\vec{v}_N, P_N)\}$$

costituito da un insieme di coppie  $(\vec{v}_j, P_j)$  che rappresentano un vettore e il suo punto di applicazione. Le rette

$$P_j \vec{v}_j = \{P_j + \lambda \vec{v}_j, \lambda \in \mathbb{R}\},$$

passanti per  $P_j$  e aventi la direzione di  $\vec{v}_j$ , si dicono **rette di applicazione**, o anche **linee di azione**, dei vettori  $\vec{v}_j$ .

I vettori

$$\vec{R} = \sum_{j=1}^N \vec{v}_j, \quad \vec{N}_Q = \sum_{j=1}^N (P_j - Q) \times \vec{v}_j$$

si chiamano **risultante** e **momento risultante rispetto al polo**  $Q \in \mathbb{E}^3$  del sistema  $\mathcal{S}$ .

Consideriamo adesso due sistemi di vettori applicati:

$$\mathcal{S}_1 = \{(\vec{v}_1, P_1), \dots, (\vec{v}_N, P_N)\}, \quad \mathcal{S}_2 = \{(\vec{w}_1, Q_1), \dots, (\vec{w}_M, Q_M)\}.$$

**Definizione 7.** I sistemi  $\mathcal{S}_1$  e  $\mathcal{S}_2$  si dicono **equivalenti** se hanno la stessa risultante e lo stesso momento risultante rispetto ad un polo  $Q$  qualunque.

**Osservazione 16.** Nelle equazioni cardinali (5.8) appaiono solamente la risultante e il momento risultante delle forze esterne applicate nei punti del sistema, quindi considerando un sistema di forze equivalente otteniamo le stesse equazioni differenziali.

**Osservazione 17.** Per ogni scelta di  $Q, Q' \in \mathbb{E}^3$  si ha

$$\vec{N}_{Q'} = \sum_{i=1}^N ((P_i - Q) + (Q - Q')) \times \vec{v}_i = \vec{N}_Q + (Q - Q') \times \vec{R}. \quad (5.9)$$

Notiamo che se i sistemi  $\mathcal{S}_1$  e  $\mathcal{S}_2$  hanno la stessa risultante ( $\vec{R}^{\mathcal{S}_1} = \vec{R}^{\mathcal{S}_2}$ ) e lo stesso momento risultante rispetto ad un polo  $Q$  ( $\vec{N}_Q^{\mathcal{S}_1} = \vec{N}_Q^{\mathcal{S}_2}$ ), allora i due sistemi hanno lo stesso momento risultante rispetto ad un qualunque altro polo  $Q'$ :

$$\begin{aligned} \vec{N}_{Q'}^{\mathcal{S}_1} &= \vec{N}_Q^{\mathcal{S}_1} + (Q - Q') \times \vec{R}^{\mathcal{S}_1} = \\ &= \vec{N}_Q^{\mathcal{S}_2} + (Q - Q') \times \vec{R}^{\mathcal{S}_2} = \vec{N}_{Q'}^{\mathcal{S}_2} \end{aligned}$$

**Definizione 8.** Diciamo che un sistema di vettori applicati  $\{(\vec{v}_j, P_j)\}_{j=1\dots N}$  è **equilibrato** se la risultante  $\vec{R}$  e il momento risultante  $\vec{N}_Q$  rispetto ad un polo  $Q$  qualunque sono nulli.

Dalla relazione (5.9) segue che per verificare che un sistema è equilibrato basta controllare che, oltre alla risultante  $\vec{R}$ , si annulli il momento risultante  $\vec{N}_Q$  rispetto ad un particolare polo  $Q$ .

Introduciamo delle **operazioni elementari**, eseguibili su un sistema  $\mathcal{S} = \{(\vec{v}_j, P_j)\}_{j=1\dots N}$  di vettori applicati, che danno luogo ad un sistema ad esso equivalente:

- (i) composizione e scomposizione di vettori applicati in uno stesso punto;
- (ii) aggiunta o eliminazione di due vettori opposti e paralleli alla retta congiungente i loro punti di applicazione (vettori *direttamente opposti*).

Infatti, eseguendo ciascuna delle due operazioni otteniamo la stessa risultante. Per vedere che anche il momento risultante resta lo stesso basta calcolarlo nel punto in cui sono applicati i vettori oggetto della composizione o scomposizione per l'operazione (i), e in un punto qualsiasi della linea di azione dei due vettori direttamente opposti per l'operazione (ii).

Osserviamo che tramite queste operazioni elementari possiamo trasportare ogni vettore applicato lungo la sua linea di azione. Infatti dato un vettore  $\vec{v}$  applicato in  $P$  e scelto un punto  $Q$  sulla linea di azione di  $\vec{v}$  possiamo aggiungere il vettore nullo  $\vec{0}$  applicato in  $Q$  e scomporlo come somma di  $\vec{v}$  e  $-\vec{v}$  (operazione (i), o anche (ii)). Possiamo poi eliminare i vettori applicati  $(\vec{v}, P), (-\vec{v}, Q)$ , in quanto direttamente opposti (operazione (ii)). Il sistema che ne risulta è quindi composto dal vettore  $\vec{v}$  applicato in  $Q$ .

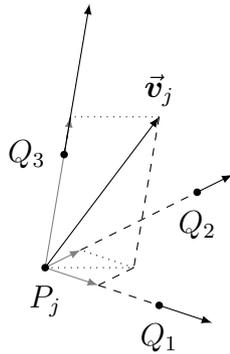
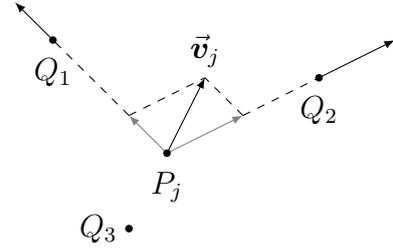
**Proposizione 22.** Ogni sistema di vettori applicati  $\{(\vec{v}_j, P_j)\}_{j=1,\dots,N}$  può essere ridotto tramite operazioni elementari ad un sistema di tre vettori (possibilmente nulli) applicati in tre punti non allineati scelti a piacere.

*Dimostrazione.* Siano  $Q_1, Q_2, Q_3$  tre punti non allineati. Mostriamo che ogni vettore  $\vec{v}_j$  applicato nel punto  $P_j$  si può sostituire con tre vettori applicati nei punti  $Q_i$ . Infatti, se  $\vec{v}_j$  appartiene allo spazio lineare generato da  $Q_2 - Q_1, Q_3 - Q_1$  e  $P_j$  giace nel piano  $Q_1Q_2Q_3$ , allora usando la prima operazione elementare possiamo scrivere  $\vec{v}_j$  come combinazione lineare di due dei vettori  $(Q_i - P_j), i = 1, 2, 3$ .

Assumiamo ad esempio che

$$\vec{v}_j = \lambda_1(Q_1 - P_j) + \lambda_2(Q_2 - P_j),$$

per opportuni coefficienti  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ . Possiamo sostituire  $(\vec{v}_j, P_j)$  con i due vettori  $\lambda_i(Q_i - P_j)$ ,  $i = 1, 2$  applicati nel punto  $P_j$ . Poi possiamo traslare tali vettori lungo la loro linea di azione e considerarli applicati nei punti  $Q_i$ .



Se invece  $\vec{v}_j$  non appartiene allo spazio lineare generato da  $Q_2 - Q_1, Q_3 - Q_1$ , a meno di una traslazione sulla sua linea di azione si può supporre  $\vec{v}_j$  applicato in un punto  $P_j$  che non giaccia nel piano  $Q_1Q_2Q_3$ . Possiamo quindi scrivere

$$\vec{v}_j = \lambda_1(Q_1 - P_j) + \lambda_2(Q_2 - P_j) + \lambda_3(Q_3 - P_j),$$

per opportuni coefficienti  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ , sostituire  $(\vec{v}_j, P_j)$  con i tre vettori  $\lambda_i(Q_i - P_j)$ ,  $i = 1, 2, 3$  applicati in  $P_j$  e traslare tali vettori lungo la loro linea di azione in modo che siano applicati nei punti  $Q_i$ .

Concludo osservando che per ogni indice  $j$  abbiamo sostituito a  $(\vec{v}_j, P_j)$  tre vettori (possibilmente nulli) applicati in  $Q_1, Q_2, Q_3$ . Usando la prima operazione elementare possiamo considerare, per ciascuno dei tre punti  $Q_i$ , la somma vettoriale di tutti i vettori applicati in questo. Si ottiene così la tesi. □

**Proposizione 23.** *Ogni sistema  $\mathcal{S}$  di vettori applicati può essere ridotto tramite operazioni elementari ad un sistema di due soli vettori applicati. Uno dei due punti di applicazione può essere scelto a piacere.*

*Dimostrazione.* Si scelga un punto  $Q$  a piacere e altri due punti  $Q_1, Q_2$  in modo che  $Q, Q_1, Q_2$  non siano allineati. Per la Proposizione 22 possiamo ridurre  $\mathcal{S}$  tramite operazioni elementari ad un sistema di tre vettori (eventualmente nulli)  $\vec{w}, \vec{w}_1, \vec{w}_2$  applicati in  $Q, Q_1, Q_2$  rispettivamente. Sia  $\Pi_1$  il piano passante per  $Q, Q_1, Q_1 + \vec{w}_1$  e  $\Pi_2$  il piano passante per  $Q, Q_2, Q_2 + \vec{w}_2$ . Se  $\vec{w}_1$  (risp.  $\vec{w}_2$ ) è nullo scegliamo un piano qualsiasi passante per  $Q$  e  $Q_1$  (risp.  $Q$  e  $Q_2$ ).

Consideriamo prima il caso generale, in cui

$$\Pi_1 \neq \Pi_2, \quad Q_1, Q_2 \notin r$$

dove  $r = \Pi_1 \cap \Pi_2$  è la retta corrispondente all'intersezione dei due piani. Scegliamo un punto  $A \neq Q$  su  $r$ . Il vettore applicato  $(\vec{w}_1, Q_1)$  è equivalente all'insieme dei

due vettori applicati  $\{(\vec{w}_1^Q, Q_1), (\vec{w}_1^A, Q_1)\}$ , diretti come  $Q_1 - Q$  e  $Q_1 - A$  e tali che  $\vec{w}_1 = \vec{w}_1^Q + \vec{w}_1^A$ . Questi due vettori si possono trasportare lungo le loro linee di azione in modo che risultino applicati in  $Q$  e  $A$  rispettivamente. Possiamo inoltre eseguire una riduzione analoga sul vettore applicato  $(\vec{w}_2, Q_2)$ . In questo modo abbiamo ridotto  $\mathcal{S}$  ad un sistema di tre vettori applicati in  $Q$  e due vettori applicati in  $A$ . Si conclude usando la prima operazione elementare.

Nei casi particolari non ancora considerati possiamo procedere come sopra scegliendo il punto  $A$  in modo opportuno. Se

$$\Pi_1 \neq \Pi_2 \quad \text{e} \quad Q_1 \in r \quad (\text{risp. } Q_2 \in r)$$

basta prendere  $A \equiv Q_1$  (risp.  $A \equiv Q_2$ ), se invece

$$\Pi_1 = \Pi_2$$

possiamo prendere indifferentemente  $A \equiv Q_1$  oppure  $A \equiv Q_2$ . □

**Proposizione 24.** *Ogni sistema di vettori applicati equilibrato si può ridurre ad un sistema nullo, cioè costituito da soli vettori nulli, tramite operazioni elementari.*

*Dimostrazione.* Applicando a tale sistema la riduzione della Proposizione 23 si arriva ad un sistema di due vettori applicati che risultano necessariamente opposti (poiché la risultante è nulla) e diretti lungo la retta congiungente i loro due punti di applicazione (poiché il momento risultante rispetto a un polo qualunque è nullo). Tale sistema si riduce mediante la seconda operazione elementare ad un sistema nullo. □

**Proposizione 25.** *Sia  $\mathcal{S} = \{(\vec{v}_1, P_1), (\vec{v}_2, P_2), (\vec{v}_3, P_3)\}$  un sistema equilibrato formato da soli tre vettori. Allora le rette di applicazione di tali vettori sono coplanari. Inoltre, tali rette sono concorrenti in uno stesso punto oppure parallele.*

*Dimostrazione.* Indichiamo con  $r_1, r_2, r_3$  le tre rette di applicazione. Se queste sono coincidenti il risultato vale banalmente. Se non è così allora possiamo trasportare i vettori  $\vec{v}_j$  lungo le loro linee di azione e assumere che i punti di applicazione  $P_j$  non siano allineati. Consideriamo le coppie  $(\vec{v}_1, P_1)$  e  $(\vec{v}_2, P_2)$ . Dato un punto  $Q$  dell'asse  $r_{12}$ , passante per  $P_1, P_2$ , le proiezioni dei momenti

$$(P_1 - Q) \times \vec{v}_1, \quad (P_2 - Q) \times \vec{v}_2$$

lungo  $r_{12}$  sono nulle. Poiché il sistema è equilibrato, il momento risultante rispetto a qualunque polo è nullo, quindi anche la proiezione del momento

$$(P_3 - Q) \times \vec{v}_3$$

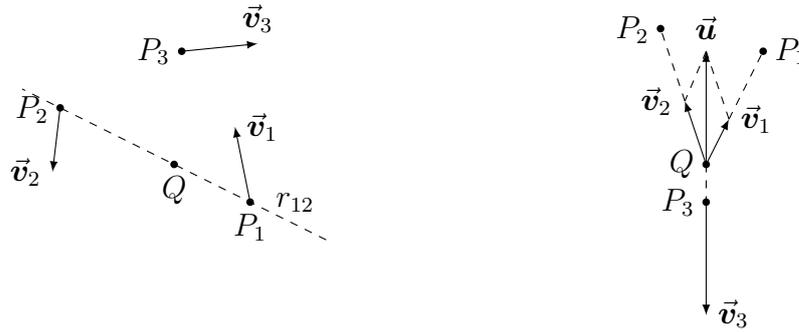


Figura 5.1: Sinistra: le rette di applicazione sono coplanari. Destra: se due rette di applicazione di incontrano in un punto  $Q$  allora anche la terza retta di applicazione passa da  $Q$ .

lungo  $r_{12}$  deve essere nulla. Dunque i vettori  $\vec{v}_3$ ,  $P_3 - Q$ ,  $P_2 - P_1$  sono linearmente dipendenti e il punto  $P_3 + \vec{v}_3$  sta nel piano  $P_1P_2P_3$ . Analogamente si dimostra che i punti  $P_1 + \vec{v}_1$ ,  $P_2 + \vec{v}_2$  stanno in tale piano. Quindi le rette di applicazione  $r_1, r_2, r_3$  sono coplanari (vedi Figura 5.1 a sinistra).

Se  $r_1, r_2$  si incontrano in un punto  $Q$ , si possono trasportare  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  fino ad avere il loro punto di applicazione in  $Q$ . La somma  $\vec{u} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$  di tali vettori applicata in  $Q$  equivale al sistema dei due vettori applicati. Poiché il sistema  $\mathcal{S}$  è equilibrato, la linea di azione  $r$  di  $(\vec{u}, Q)$  deve coincidere con la linea di azione  $r_3$  di  $(\vec{v}_3, P_3)$ , che quindi deve passare per  $Q$  (vedi Figura 5.1 a destra). Se invece  $r_1$  e  $r_2$  sono parallele, è parallela ad esse anche  $r_3$ : infatti, se  $r_1, r_3$  non fossero parallele, essendo coplanari avrebbero un punto in comune, e in questo punto dovrebbe concorrere anche  $r_2$ .

□

**Proposizione 26.** *Dati due sistemi equivalenti di vettori applicati*

$$\mathcal{S}_1 = \{(\vec{v}_j, P_j)\}_{j=1, \dots, N}, \quad \mathcal{S}_2 = \{(\vec{w}_k, Q_k)\}_{k=1, \dots, M},$$

*possiamo sempre ridurre l'uno all'altro tramite operazioni elementari.*

*Dimostrazione.* Si consideri il sistema  $\mathcal{S}'_2 = \{(-\vec{w}_h, Q_h)\}_{h=1, \dots, M}$ . Il sistema  $\mathcal{S}_3 = \{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}'_2\}$ , composto dall'unione dei tre sistemi, si può ridurre a  $\mathcal{S}_1$  tramite operazioni elementari. Infatti per ogni vettore  $\vec{w}_k$  in  $\mathcal{S}_2$  si trova  $-\vec{w}_k$  in  $\mathcal{S}'_2$  applicato allo stesso punto  $Q_k$ , quindi queste coppie di vettori si possono cancellare. Osserviamo adesso che il sistema  $\{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}'_2\}$  è equilibrato, poiché la risultante e il momento risultante (rispetto a qualsiasi polo) di  $\mathcal{S}'_2$  sono opposti a quelli di  $\mathcal{S}_2$ , che sono uguali a quelli di  $\mathcal{S}_1$ . Quindi  $\{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}'_2\}$  si può ridurre tramite operazioni elementari ad un

sistema nullo per la Proposizione 24. Concludiamo quindi che il sistema  $\mathcal{S}_3$  si può ridurre anche a  $\mathcal{S}_2$  tramite operazioni elementari.  $\square$

### 5.5.1 Asse centrale

Dimostriamo il seguente risultato.

**Proposizione 27.** *Dato un sistema di vettori applicati*

$$\mathcal{S} = \{(\vec{v}_i, P_i)\}_{i=1\dots N}, \quad (5.10)$$

con risultante  $\vec{R}$  non nulla, esiste un'unica retta  $r$ , detta **asse centrale**, formata da tutti e soli i punti  $Q \in \mathbb{E}^3$  tali che

$$\vec{N}_Q \times \vec{R} = \vec{0}. \quad (5.11)$$

*Dimostrazione.* Ricordiamo innanzitutto che per ogni scelta di  $P, Q \in \mathbb{E}^3$  si ha

$$\vec{N}_P = \vec{N}_Q + (Q - P) \times \vec{R}. \quad (5.12)$$

Scelto a piacere un punto  $O' \in \mathbb{E}^3$ , consideriamo il piano  $\Pi_{O'}$  passante per  $O'$  e ortogonale alla risultante  $\vec{R}$ . Osserviamo che se  $Q \in \Pi_{O'}$  e  $Q'$  è un punto della retta  $\{Q + \lambda\vec{R}, \lambda \in \mathbb{R}\}$  passante per  $Q$  e parallela a  $\vec{R}$ , dalla relazione (5.12) si ottiene  $\vec{N}_{Q'} = \vec{N}_Q$ , quindi in particolare si ha

$$\vec{N}_{Q'} \times \vec{R} = \vec{N}_Q \times \vec{R}.$$

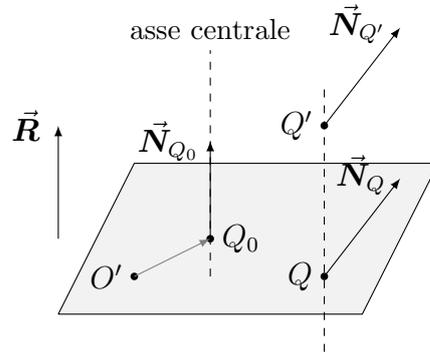
Per dimostrare l'esistenza dell'asse centrale posso dunque limitarmi a cercare nel piano  $\Pi_{O'}$  un punto  $Q_0$  tale che  $\vec{N}_{Q_0} \times \vec{R}$  sia nullo. Si ha

$$\vec{N}_{Q_0} \times \vec{R} = (\vec{N}_{O'} + (O' - Q_0) \times \vec{R}) \times \vec{R} = \vec{N}_{O'} \times \vec{R} - |\vec{R}|^2(O' - Q_0),$$

poichè  $(O' - Q_0) \perp \vec{R}$ . Quindi, ponendo  $\vec{N}_{Q_0} \times \vec{R} = \vec{0}$ , si ottiene come unica soluzione

$$Q_0 - O' = \frac{1}{|\vec{R}|^2} \vec{R} \times \vec{N}_{O'}.$$

$\square$



Dalla relazione (5.12) segue anche che

$$\vec{N}_P \cdot \vec{R} = \vec{N}_Q \cdot \vec{R}, \quad \forall P, Q \in \mathbb{E}^3. \quad (5.13)$$

L'espressione  $\vec{N}_P \cdot \vec{R}$  non dipende dalla scelta del polo e si chiama **trinomio invariante**, con riferimento alla somma dei tre termini che si ottengono sviluppando il prodotto scalare.

Per ogni punto  $Q \in \mathbb{E}^3$  usando la formula (1.8) possiamo scrivere  $\vec{N}_Q$  come somma di due vettori ortogonali:

$$\vec{N}_Q = \frac{1}{|\vec{R}|^2} [(\vec{N}_Q \cdot \vec{R})\vec{R} + \vec{R} \times (\vec{N}_Q \times \vec{R})]. \quad (5.14)$$

Il primo vettore è lo stesso al variare di  $Q$  perché  $\vec{N}_Q \cdot \vec{R}$  è il trinomio invariante. Se si sceglie come polo un punto  $Q_0$  dell'asse centrale si ha  $\vec{N}_{Q_0} \times \vec{R} = \vec{0}$ . Quindi, dalla relazione

$$|\vec{N}_Q| = \frac{1}{|\vec{R}|^2} \sqrt{(\vec{N}_Q \cdot \vec{R})^2 |\vec{R}|^2 + |\vec{R} \times (\vec{N}_Q \times \vec{R})|^2},$$

segue che

$$|\vec{N}_{Q_0}| = \min_{Q \in \mathbb{E}^3} |\vec{N}_Q|.$$

**Esercizio 15.** *Trovare l'asse centrale nel caso del sistema  $\mathcal{S}$  costituito delle forze di gravità applicate in  $N$  punti materiali  $P_1, \dots, P_N$  di masse  $m_1, \dots, m_N$ :*

$$\mathcal{S} = \{(\vec{F}_i, P_i)\}_{i=1 \dots N}, \quad \vec{F}_i = -m_i g \hat{e}_3, \quad (5.15)$$

dove  $g$  è l'accelerazione di gravità.

### 5.5.2 Coppie di vettori applicati

Una **coppia di vettori applicati** è un sistema della forma

$$\{(\vec{v}_1, P_1), (\vec{v}_2, P_2)\}$$

tali che  $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{0}$ . Assumiamo  $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ . La quantità  $|(P_1 - P_2) \times \vec{v}_1|/|\vec{v}_1|$ , che rappresenta la distanza tra le due rette di applicazione  $P_1\vec{v}_1, P_2\vec{v}_2$ , si chiama **braccio della coppia**.

Osserviamo che il momento di una coppia di vettori applicati non dipende dalla scelta del polo. Infatti si ha

$$(P_1 - Q) \times \vec{v}_1 + (P_2 - Q) \times \vec{v}_2 = (P_1 - P_2) \times \vec{v}_1, \quad \forall Q \in \mathbb{E}^3.$$

**Proposizione 28.** *Ogni sistema di vettori applicati  $\mathcal{S} = \{(\vec{v}_i, P_i)\}_{i=1, \dots, N}$  è equivalente ad un sistema costituito da un vettore applicato in un punto qualunque  $Q$ , e da una coppia di vettori applicati, dipendente dalla scelta di  $Q$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\vec{R} = \sum_i \vec{v}_i$  la risultante dei vettori del sistema e  $\vec{N}_Q = \sum_i (P_i - Q) \times \vec{v}_i$  il momento risultante rispetto ad un polo fissato  $Q \in \mathbb{E}^3$  scelto a piacere. Consideriamo il sistema di vettori applicati

$$\mathcal{S}' = \{(\vec{R}, Q), (\vec{v}, Q_1), (-\vec{v}, Q_2)\}$$

con  $Q_1, Q_2 \in \mathbb{E}^3$  e  $\vec{v} \in \mathbb{V}^3$ , scelti in modo che il momento  $(Q_1 - Q_2) \times \vec{v}$  della coppia  $\{(\vec{v}, Q_1), (-\vec{v}, Q_2)\}$  sia uguale a  $\vec{N}_Q$ . Si verifica facilmente che  $\mathcal{S}'$  è equivalente a  $\mathcal{S}$ . □

**Proposizione 29.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema di vettori applicati  $\mathcal{S} = \{(\vec{v}_i, P_i)\}_{i=1, \dots, N}$  sia equivalente al sistema composto da un unico vettore applicato in un punto opportuno, oppure ad una sola coppia, è che il trinomio invariante sia nullo. Se la risultante  $\vec{R}$  è non nulla si ha il primo caso e il punto di applicazione è un punto qualunque dell'asse centrale, se  $\vec{R} = \vec{0}$  si ha il secondo.*

*Dimostrazione.* La condizione

$$\vec{N}_Q \cdot \vec{R} = 0 \tag{5.16}$$

per un polo  $Q \in \mathbb{E}^3$  (e quindi per tutti) è necessaria. Infatti se  $\mathcal{S}$  è equivalente ad un sistema composto da una sola coppia allora questo sistema ha risultante nulla. Se invece  $\mathcal{S}$  è equivalente ad un unico vettore applicato in un punto  $Q'$  allora il momento risultante rispetto a  $Q'$  è nullo. In entrambi i casi il trinomio invariante è nullo.

Vediamo che la condizione (5.16) è anche sufficiente. Se  $\vec{R} = \vec{0}$  allora, usando la Proposizione 28, si trova che  $\mathcal{S}$  è equivalente ad una coppia di vettori applicati. Se  $\vec{R} \neq \vec{0}$  basta osservare che  $\vec{N}_Q = \vec{0}$  per ogni punto  $Q$  dell'asse centrale, infatti si ha

$$\vec{N}_Q \cdot \vec{R} = 0, \quad \vec{N}_Q \times \vec{R} = \vec{0}.$$

Dunque, usando sempre la Proposizione 28, si ottiene che  $\mathcal{S}$  è equivalente al sistema  $\{(\vec{R}, Q)\}$ . □

Osserviamo che nella discussione precedente è compreso il caso di un sistema equilibrato: in tal caso l'unico vettore o l'unica coppia sono nulli.

**Esempio 3.** Il sistema di forze di gravità  $\mathcal{S}$  dell'Esercizio 15 è equivalente al sistema  $\mathcal{S}' = \{(\vec{R}, B)\}$  formato da un'unica forza  $\vec{R} = -mg\hat{e}_3$  applicata nel baricentro  $B$ , infatti il trinomio invariante  $\vec{N}_Q \cdot \vec{R}$  è nullo (tutte le forze sono parallele ed  $\vec{N}_Q$  è ad esse ortogonale) e il baricentro è un punto dell'asse centrale.

Come conseguenza il momento risultante delle forze di gravità rispetto al baricentro è nullo.

**Esercizio 16.** Mostrare che ogni sistema di vettori applicati paralleli ha trinomio invariante nullo.

*Suggerimento:* vedere l'esempio precedente.

Diciamo che un sistema  $S = \{(\vec{v}_j, P_j)\}_{j=1, \dots, N}$  di vettori applicati è **piano** se i punti  $P_j, P_j + \vec{v}_j, j = 1, \dots, N$  giacciono tutti in uno stesso piano.

**Esercizio 17.** *Mostrare che ogni sistema piano di vettori applicati ha trinomio invariante nullo.*

### 5.5.3 Centro di vettori paralleli

Consideriamo un sistema di vettori applicati tutti paralleli, della forma

$$\mathcal{S} = \{(\vec{v}_j, P_j)\}_{j=1, \dots, N},$$

in cui

$$\vec{v}_j = v_j \hat{e},$$

con  $v_j \in \mathbb{R}$  ed  $\hat{e} \in \mathbb{V}^3$  è un vettore unitario. Scelto  $Q \in \mathbb{E}^3$  arbitrariamente, chiamiamo **centro dei vettori paralleli**  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N$  il punto  $C \in \mathbb{E}^3$  definito dalla relazione

$$v(C - Q) = \sum_{j=1}^N v_j(P_j - Q) \quad \text{con} \quad v = \sum_{j=1}^N v_j. \quad (5.17)$$

In modo analogo a quanto fatto per il baricentro si può dimostrare che la definizione del centro  $C$  non dipende dalla scelta di  $Q$ .

Osserviamo che il punto  $C$  appartiene all'asse centrale, infatti

$$\vec{N}_C = \sum_{j=1}^N (P_j - C) \times v_j \hat{e} = \sum_{j=1}^N v_j (P_j - C) \times \hat{e} = v(C - C) \times \hat{e} = \vec{0}.$$

Osserviamo anche che il centro  $C$  del sistema resta lo stesso se cambiamo la direzione comune  $\hat{e}$  dei vettori  $\vec{v}_j$  lasciando invariati i loro punti di applicazione  $P_j$ , infatti la definizione (5.17) non dipende da  $\hat{e}$ .

## 5.6 Sistemi meccanici conservativi

**Proposizione 30.** *Le forze interne di tipo classico ammettono l'energia potenziale*

$$V^{(I)}(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \mathcal{V}_{ij}(\rho_{ij}(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N), \quad (5.18)$$

con

$$\frac{d\mathcal{V}_{ij}}{d\rho_{ij}} = -f_{ij},$$

cioè valgono le relazioni

$$\mathbf{F}_k^{(I)} = -\nabla_{\mathbf{x}_k} V^{(I)}, \quad k = 1, \dots, N$$

dove

$$\nabla_{\mathbf{x}_k} V^{(I)} = \left[ \frac{\partial V^{(I)}}{\partial \mathbf{x}_k} \right]^T.$$

*Dimostrazione.* Osserviamo che  $\rho_{ij} = \rho_{ji}$  e che le funzioni  $\mathcal{V}_{ij}(\rho_{ij})$  e  $\mathcal{V}_{ji}(\rho_{ij})$  possono differire solo per una costante additiva poiché  $f_{ij} = f_{ji}$ . Si ha quindi

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}_k} V^{(I)} &= \sum_{1 \leq i < j \leq N} \nabla_{\mathbf{x}_k} \mathcal{V}_{ij} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \nabla_{\mathbf{x}_k} \mathcal{V}_{kj} \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \frac{d\mathcal{V}_{kj}}{d\rho_{kj}} \nabla_{\mathbf{x}_k} \rho_{kj} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N f_{kj} \frac{\mathbf{r}_{kj}}{\rho_{kj}} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \mathbf{F}_{kj} = -\mathbf{F}_k^{(I)}. \end{aligned}$$

Nei passaggi precedenti abbiamo usato il fatto che

$$\mathcal{V}_{ij} = \mathcal{V}_{ij}(\rho_{ij}) = \mathcal{V}_{ij}(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|),$$

per cui  $\mathcal{V}_{ij}$  non dipende da  $\mathbf{x}_k$  se  $k \neq i, j$ . Inoltre abbiamo usato le relazioni

$$\nabla_{\mathbf{x}_k} \rho_{kj} = \left[ \frac{\partial |\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j|}{\partial \mathbf{x}_k} \right]^T = \frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j}{|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j|}, \quad k, j = 1, \dots, N.$$

□

Nella Figura 5.2, per  $N = 4$ , evidenziamo a sinistra con una curva tratteggiata gli indici dei termini che appaiono nella somma che definisce  $V^{(I)}$ ; a destra mettiamo invece in evidenza gli indici dei termini non nulli che appaiono nell'espressione di  $\nabla_{\mathbf{x}_k} V^{(I)}$  per  $k = 2$ . I cerchi grigi più grandi corrispondono agli indici  $(i, j)$  per cui si ha  $i = k$  oppure  $j = k$ . Al posto dell'indice  $(1, 2)$  possiamo considerare  $(2, 1)$  perché  $\mathcal{V}_{12}$  e  $\mathcal{V}_{21}$  differiscono al più per una costante.

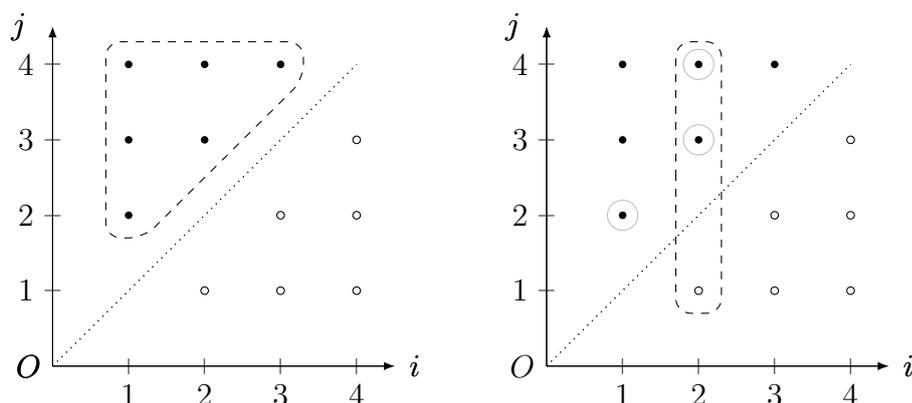


Figura 5.2: Caso  $N = 4$ . Indici dei termini della somma che definisce  $V^{(I)}$  (a sinistra); indici dei termini non nulli che appaiono in  $\nabla_{\mathbf{x}_k} V^{(I)}$  per  $k = 2$  (a destra).

**Osservazione 18.** Possiamo anche assumere, senza perdita di generalità, che  $\mathcal{V}_{ij} = \mathcal{V}_{ji}$ . In questo caso l'energia potenziale delle forze interne si scrive

$$V^{(I)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \mathcal{V}_{ij}(\rho_{ij}).$$

**Osservazione 19.** Le funzioni

$$V_k^{(I)}(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \mathcal{V}_{kj}(\rho_{kj}), \quad k = 1, \dots, N$$

soddisfano le relazioni

$$\mathbf{F}_k^{(I)} = -\nabla_{\mathbf{x}_k} V_k^{(I)},$$

ma la somma  $\sum_{k=1}^N V_k^{(I)}$  non va bene come energia potenziale delle forze interne, perché ci dà un contributo doppio delle forze.

Introduciamo la potenza delle forze interne e esterne, denotate rispettivamente con

$$\Pi^{(I)} = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j^{(I)} \cdot \mathbf{v}_j, \quad \Pi^{(E)} = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j^{(E)} \cdot \mathbf{v}_j.$$

Con questa notazione si ottiene

$$\Pi = \Pi^{(I)} + \Pi^{(E)}.$$

Abbiamo la seguente

**Proposizione 31.** (teorema dell'energia cinetica) Sia  $\mathbf{x}(t) = (\mathbf{x}_1(t) \dots \mathbf{x}_N(t))$  una qualunque soluzione delle equazioni di Newton (1.13). Allora, lungo questa soluzione vale la relazione

$$\dot{T} = \Pi = \Pi^{(I)} + \Pi^{(E)}. \quad (5.19)$$

Se le forze interne sono di tipo classico, con energia potenziale  $V^{(I)}$ , allora la (5.19) si può scrivere

$$\frac{d}{dt}(T + V^{(I)}) = \Pi^{(E)}. \quad (5.20)$$

*Dimostrazione.*

$$\Pi = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j \cdot \dot{\mathbf{x}}_j = \sum_{j=1}^N m_j \ddot{\mathbf{x}}_j \cdot \dot{\mathbf{x}}_j = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{2} \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{x}}_j \cdot \dot{\mathbf{x}}_j) = \dot{T}.$$

Siccome le forze interne ammettono l'energia potenziale  $V^{(I)}$ , abbiamo

$$\frac{d}{dt}V^{(I)} = \nabla_{\mathbf{x}}V^{(I)} \cdot \dot{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^N \nabla_{\mathbf{x}_i}V^{(I)} \cdot \dot{\mathbf{x}}_i = - \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(I)} \cdot \dot{\mathbf{x}}_i = -\Pi^{(I)},$$

da cui segue (5.20). □

**Definizione 9.** La forza esterna  $\mathbf{F}_j^{(E)}$  che agisce sul punto  $P_j$  si dice *conservativa* se è puramente posizionale, cioè  $\mathbf{F}_j^{(E)} = \mathbf{F}_j^{(E)}(\mathbf{x}_j)$ , ed esiste una funzione scalare  $V_j(\mathbf{x}_j)$  tale che  $\mathbf{F}_j^{(E)} = -\nabla_{\mathbf{x}_j}V_j$ .

**Definizione 10.** Un sistema meccanico di  $N$  punti materiali si dice **conservativo** se le forze  $\mathbf{F}_j$  che agiscono sui punti  $P_j$  sono puramente posizionali e se esiste una funzione scalare  $V(\mathbf{x})$  tale che  $\mathbf{F}_j = -\nabla_{\mathbf{x}_j}V$ , per  $j = 1 \dots N$ . La funzione  $V$  si chiama *energia potenziale del sistema*.

Se le forze esterne  $\mathbf{F}_j^{(E)}$  sono conservative con energia potenziale  $V_j$  allora la funzione

$$V^{(E)}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N V_j(\mathbf{x}_j)$$

soddisfa

$$\mathbf{F}_j^{(E)} = -\nabla_{\mathbf{x}_j}V^{(E)}, \quad j = 1 \dots N.$$

In questo caso il sistema meccanico è conservativo, con energia potenziale

$$V(\mathbf{x}) = V^{(I)}(\mathbf{x}) + V^{(E)}(\mathbf{x}).$$

Introduciamo l'**energia totale**

$$E(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = T(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + V^{(I)}(\mathbf{x}) + V^{(E)}(\mathbf{x}).$$

**Proposizione 32.** (conservazione dell'energia) *L'energia totale di un sistema di  $N$  punti materiali soggetto a forze interne di tipo classico e a forze esterne conservative è un integrale primo.*

*Dimostrazione.* Usando la (5.20) si ha

$$\frac{d}{dt}(T + V^{(I)} + V^{(E)}) = \Pi^{(E)} + \frac{d}{dt}V^{(E)} = 0,$$

infatti

$$\frac{d}{dt}V^{(E)} = \sum_{i=1}^N \nabla_{\mathbf{x}_i} V^{(E)} \cdot \dot{\mathbf{x}}_i = - \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(E)} \cdot \dot{\mathbf{x}}_i = -\Pi^{(E)}.$$

□

## 5.7 Altri risultati sul problema degli $N$ corpi

Consideriamo  $N$  punti materiali  $P_1 \dots P_N$  di masse  $m_1 \dots m_N$  soggetti soltanto alla loro interazione mutua, dovuta a forze interne di tipo classico. Sia  $V(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_N)$  l'energia potenziale di tali forze, per cui il moto dei punti soddisfa le equazioni

$$m_j \ddot{\mathbf{x}}_j = -\nabla_{\mathbf{x}_j} V(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_N).$$

Introduciamo il **momento di inerzia** del sistema rispetto al baricentro  $\mathbf{x}_B$ :

$$I(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_N) = \sum_{i=1}^N m_i |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_B|^2.$$

Dimostriamo che il momento di inerzia si può scrivere in termini delle distanze mutue tra i punti:

**Proposizione 33.** *Vale la seguente formula*

$$I = \sum_{i=1}^N m_i |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_B|^2 = \frac{1}{m} \sum_{1 \leq i < j \leq N} m_i m_j |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2. \quad (5.21)$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N m_i m_j |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N m_i m_j (|\mathbf{x}_i|^2 + |\mathbf{x}_j|^2 - 2\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j) = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (m - m_i) |\mathbf{x}_i|^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j (m - m_j) |\mathbf{x}_j|^2 - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N m_i m_j (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j) = \\
&= m \sum_{i=1}^N m_i |\mathbf{x}_i|^2 - \sum_{i=1}^N m_i^2 |\mathbf{x}_i|^2 - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N m_i m_j (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j) = \\
&= m \sum_{i=1}^N m_i |\mathbf{x}_i|^2 - \sum_{i,j=1}^N m_i m_j (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j).
\end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N m_i |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_B|^2 &= \sum_{i=1}^N m_i \left( \mathbf{x}_i - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{x}_j \right) \cdot \left( \mathbf{x}_i - \frac{1}{m} \sum_{h=1}^N m_h \mathbf{x}_h \right) = \\
&= \sum_{i=1}^N m_i |\mathbf{x}_i|^2 - 2 \sum_{i,j=1}^N \frac{m_i m_j}{m} \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j + \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{m^2} \sum_{j,h=1}^N m_j m_h \mathbf{x}_j \cdot \mathbf{x}_h = \\
&= \sum_{i=1}^N m_i |\mathbf{x}_i|^2 - \frac{2}{m} \sum_{i,j=1}^N m_i m_j (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j) + \frac{1}{m} \sum_{i,j=1}^N m_i m_j (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j).
\end{aligned}$$

□

**Osservazione 20.** *Il risultato precedente è utile per interpretare alcune questioni sul moto degli  $N$  corpi in termini del moto delle distanze mutue.*

A meno di applicare una trasformazione galileiana, possiamo assumere che il baricentro degli  $N$  punti sia fermo nell'origine:  $\mathbf{x}_B = \mathbf{0}$ . Dimostriamo la seguente

**Proposizione 34.**

$$\ddot{I} = 4T + 2 \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{x}_i$$

*Dimostrazione.* Basta derivare due volte  $I(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_N)$  rispetto a  $t$  ed usare le equazioni di Newton:

$$\dot{I} = 2 \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i \cdot \dot{\mathbf{x}}_i, \quad \ddot{I} = 2 \sum_{i=1}^N m_i |\dot{\mathbf{x}}_i|^2 + 2 \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{x}_i.$$

□

**Corollario 2.** (*identità di Lagrange*) Se le forze sono conservative e l'energia potenziale  $V$  è omogenea di grado  $\alpha$  allora

$$\ddot{I} = 4T - 2 \sum_{i=1}^N \nabla_{\mathbf{x}_i} V \cdot \mathbf{x}_i = 4T - 2\alpha V = 4E - 2(\alpha + 2)V,$$

cioè  $\ddot{I}$  dipende solo dalla posizione dei punti e dall'energia totale  $E$ .

## 5.8 Esercizi

**Esercizio 18.**

i) In un piano assegnato si fissi un sistema di riferimento  $O\hat{e}_1\hat{e}_2$  e si consideri il sistema di forze applicate

$$\mathcal{F} = \{(\vec{\mathbf{F}}_1, P_1), \dots, (\vec{\mathbf{F}}_5, P_5)\}$$

con

$$\vec{\mathbf{F}}_j = j\hat{e}_2, \quad P_j = O + j\hat{e}_1, \quad j = 1, \dots, 5.$$

Trovare l'asse centrale del sistema  $\mathcal{F}$ .

ii) In un piano assegnato si consideri un sistema di vettori applicati paralleli

$$\mathcal{S} = \{(\vec{\mathbf{v}}_1, P_1), \dots, (\vec{\mathbf{v}}_N, P_N)\}, \quad N > 1.$$

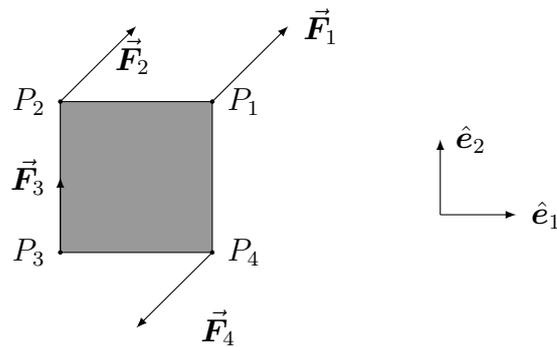
Si prendano in tale piano due rette  $r_1, r_2$  parallele e distinte, aventi la stessa direzione dei vettori  $\vec{\mathbf{v}}_j$  del sistema  $\mathcal{S}$ .

Mostrare che è possibile trovare un sistema di vettori applicati equivalente ad  $\mathcal{S}$  costituito da due vettori paralleli alle rette  $r_1, r_2$  (eventualmente nulli) applicati uno a un punto di  $r_1$  e l'altro a un punto di  $r_2$ .

**Esercizio 19.** In un piano orizzontale si fissi un sistema di riferimento  $O\hat{e}_1\hat{e}_2$  e si consideri una lamina quadrata, orientata come in figura, con lati di lunghezza  $2\ell$  e vertici  $P_1, P_2, P_3, P_4$ . Ai vertici della lamina vengono applicate le forze

$$\vec{\mathbf{F}}_1 = F(\hat{e}_1 + \hat{e}_2), \quad \vec{\mathbf{F}}_2 = \vec{\mathbf{F}}_1, \quad \vec{\mathbf{F}}_3 = F\hat{e}_2, \quad \vec{\mathbf{F}}_4 = -\vec{\mathbf{F}}_1,$$

con  $F > 0$ .



i) Trovare l'asse centrale del sistema

$$\mathcal{F} = \{(\vec{F}_j, P_j)\}_{j=1\dots 4}.$$

e dire se esso interseca la lamina.

ii) È possibile aggiungere una forza  $\vec{F}_5$  applicata ad un punto  $P_5$  della lamina in modo tale che il sistema di forze applicate esteso

$$\tilde{\mathcal{F}} = \{(\vec{F}_j, P_j)\}_{j=1\dots 5}$$

sia equilibrato?

# Capitolo 6

## Il corpo rigido

Descriviamo l'insieme delle configurazioni e le proprietà cinematiche dei corpi rigidi, nel caso discreto e continuo.

### 6.1 Definizioni e preliminari geometrici

**Definizione 11.** *Un corpo rigido discreto è un sistema formato da  $N$  punti materiali che mantengono invariate nel tempo le loro distanze mutue.*

**Definizione 12.** *Un corpo rigido continuo è un sistema formato da una distribuzione continua di punti che mantengono invariate nel tempo le loro distanze mutue.*

Nel seguito svilupperemo la teoria per un corpo rigido discreto e nella Sezione 6.6 discuteremo il caso di un corpo rigido continuo.

Sia  $\mathfrak{C}$  un corpo rigido discreto formato da  $N$  punti materiali  $P_1, \dots, P_N$  di masse  $m_1, \dots, m_N$ . Fissato un riferimento  $\Sigma = O \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$ , le posizioni dei punti  $P_j$  sono individuate dai vettori  $P_j - O$ , con coordinate  $\mathbf{x}_j$  nella base  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ . Le distanze mutue  $\rho_{ij} = |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$  tra punti diversi  $P_i, P_j$  di  $\mathfrak{C}$  soddisfano le relazioni

$$\rho_{ij} = c_{ij}, \quad 1 \leq i < j \leq N \quad (6.1)$$

per certe costanti  $c_{ij} > 0$ .

Con la definizione di corpo rigido discreto incontriamo un primo caso in cui i punti del sistema non si possono muovere liberamente, infatti le loro coordinate sono soggette alle relazioni (6.1). Osserviamo che, per  $N$  abbastanza grande, queste relazioni non possono essere tutte indipendenti, cioè i gradienti delle funzioni  $\rho_{ij} - c_{ij}$  non possono essere tutti vettori linearmente indipendenti: infatti questi vettori sono  $N(N-1)/2$  e lo spazio ambiente ha dimensione  $3N$ . Richiamiamo adesso alcuni concetti geometrici utili per comprendere la descrizione cinematica di un corpo rigido.

### 6.1.1 Sottovarietà di $\mathbb{R}^m$

**Definizione 13.** Sia  $\Psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  una mappa differenziabile, con  $1 \leq k < m$ . Diciamo che l'insieme

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \Psi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} \quad (6.2)$$

è una sottovarietà di  $\mathbb{R}^m$  (o semplicemente una varietà) di dimensione  $n = m - k$  se

$$\text{rank} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = k, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{C}.$$

**Esempio 4.** Il cerchio di raggio unitario centrato nell'origine

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \Psi(x, y) = 0\},$$

dove

$$\Psi(x, y) = x^2 + y^2 - 1,$$

è una sottovarietà di  $\mathbb{R}^2$  di dimensione 1, infatti

$$\frac{\partial \Psi}{\partial (x, y)}(x, y) = 2(x, y) \neq (0, 0), \quad \forall (x, y) \in \mathcal{C}.$$

**Esempio 5.** L'insieme  $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \Psi(x, y) = 0\}$ , con

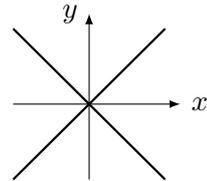
$$\Psi(x, y) = x^2 - y^2,$$

è l'unione di due rette ortogonali passanti per l'origine e non è una sottovarietà di  $\mathbb{R}^2$ . Infatti

$$\frac{\partial \Psi}{\partial (x, y)}(x, y) = 2(x, -y),$$

che si annulla per  $(x, y) = (0, 0) \in \mathcal{C}$ .

Notiamo che in  $(x, y) = (0, 0)$  la retta tangente a  $\mathcal{C}$  non è definita. Comunque l'insieme  $\mathcal{C} \setminus \{(0, 0)\}$ , composto da quattro semirette disgiunte, è una sottovarietà di  $\mathbb{R}^2$ .



### Rappresentazione parametrica e coordinate locali

In (6.2) abbiamo introdotto la sottovarietà  $\mathcal{C}$  tramite una sua rappresentazione implicita, nel senso che essa viene definita come luogo di zeri della mappa  $\Psi$ . È anche utile descrivere  $\mathcal{C}$  in un altro modo, tramite delle sue **parametrizzazioni**

**locali.** Per il teorema delle funzioni implicite, possiamo introdurre in un intorno<sup>1</sup> di ogni punto di  $\mathcal{C}$  delle coordinate locali

$$\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$$

e una mappa della forma

$$\mathbb{R}^n \supseteq U \ni \mathbf{q} \mapsto \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}) \in \mathcal{C},$$

con

$$\text{rank} \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}) = n,$$

definita su un aperto  $U$  di  $\mathbb{R}^n$ . Una scelta delle coordinate locali si può fare nel modo seguente. A meno di riordinare le componenti  $x_1, \dots, x_m$  di  $\mathbf{x}$  possiamo assumere che in un intorno di  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$  si abbia

$$\det \frac{\partial \Psi}{\partial (x_1, \dots, x_k)} \neq 0$$

e quindi, per il teorema delle funzioni implicite, possiamo scrivere  $x_1, \dots, x_k$  in funzione delle  $n$  variabili  $x_{k+1}, \dots, x_m$ , che dunque si possono usare come coordinate locali.

**Esempio 6.** Si consideri la sottovarietà di  $\mathbb{R}^2$  dell'Esempio 4, definita da

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \Psi(x, y) = 0\}, \quad \Psi(x, y) = x^2 + y^2 - 1.$$

Il punto  $(x_1, y_1) = (0, 1)$  appartiene a  $S^1$ . Poiché

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y}(0, 1) = 2 \neq 0,$$

per il teorema delle funzioni implicite esistono  $a > 0$  ed un'unica funzione continua  $y = f(x)$  tale che  $f(0) = 1$  e

$$\Psi(x, f(x)) = 0$$

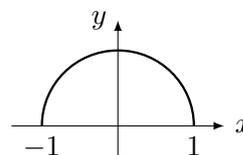
per ogni  $x \in (-a, a)$ . In questo caso si può anche scrivere esplicitamente l'espressione della funzione  $f$ :

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in (-1, 1).$$

La mappa

$$(-1, 1) \ni x \mapsto (x, f(x))$$

è una parametrizzazione locale di  $S^1$  in un intorno di  $(x_1, y_1) = (0, 1)$ .



<sup>1</sup>Un intorno di un punto  $\mathbf{x}_0$  di una sottovarietà  $\mathcal{C}$  di  $\mathbb{R}^m$  è dato dall'intersezione  $V \cap \mathcal{C}$  di questa varietà con un intorno  $V$  di  $\mathbf{x}_0$  in  $\mathbb{R}^m$ .

Osserviamo che anche il punto  $(x_2, y_2) = (1, 0)$  appartiene a  $\mathcal{C}$ , però

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y}(1, 0) = 0,$$

quindi non possiamo usare il teorema delle funzioni implicite per descrivere  $S^1$  in un intorno di  $(x_2, y_2)$  con una funzione della variabile  $x$ . Poiché

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}(1, 0) = 2 \neq 0,$$

possiamo trovare  $a > 0$  ed una funzione continua  $x = g(y)$  tale che  $g(0) = 1$  e

$$\Psi(g(y), y) = 0$$

per ogni  $y \in (-a, a)$ .

Anche in questo caso possiamo scrivere  $g$  esplicitamente come

$$g(y) = \sqrt{1 - y^2}, \quad y \in (-1, 1)$$

e possiamo scrivere la parametrizzazione locale come

$$(-1, 1) \ni y \mapsto (g(y), y).$$

L'insieme  $S^1$  ammette anche le seguenti parametrizzazioni locali, che usano la coordinata angolare  $\theta$ :

$$(a - \pi, a + \pi) \ni \theta \mapsto \chi(\theta) = (x(\theta), y(\theta)) = (\cos \theta, \sin \theta),$$

dove  $a \in [0, 2\pi)$ . Scegliendo opportunamente il valore di  $a$  possiamo rappresentare un intorno di ogni punto di  $S^1$ .

**Esempio 7.** Si consideri la sfera bidimensionale in  $\mathbb{R}^3$ , definita da

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \Psi(x, y, z) = 0\},$$

dove

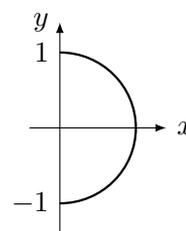
$$\Psi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1.$$

Poiché

$$\frac{\partial \Psi}{\partial (x, y, z)}(x, y, z) = 2(x, y, z) \neq \mathbf{0}, \quad \forall (x, y, z) \in S^2,$$

l'insieme  $S^2$  è una sottovarietà di  $\mathbb{R}^3$  di dimensione 2. Possiamo rappresentare  $S^2$  tramite due parametrizzazioni locali della forma

$$\mathbf{q} \mapsto \chi(\mathbf{q}) = (x(\mathbf{q}), y(\mathbf{q}), z(\mathbf{q})),$$



dove  $\mathbf{q} = (\alpha, \delta)$  sono coordinate sferiche. Una delle due mappe è data da

$$x = \cos \delta \cos \alpha, \quad y = \cos \delta \sin \alpha, \quad z = \sin \delta,$$

con  $\alpha \in (-\pi, \pi)$ ,  $\delta \in (-\pi/2, \pi/2)$  e ricopre  $S^2$  meno un arco  $\gamma_1$ , che corrisponde a un meridiano. L'altra mappa è data da

$$x = -\cos \alpha \cos \delta, \quad y = \sin \alpha, \quad z = \cos \alpha \sin \delta,$$

con  $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ ,  $\delta \in (-\pi, \pi)$  e ricopre  $S^2$  meno un arco  $\gamma_2$ , che corrisponde a metà dell'equatore. Osserviamo che  $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$ .

## 6.2 Proprietà cinematiche di un corpo rigido

### 6.2.1 Configurazioni di un corpo rigido con tutti i punti allineati

Consideriamo prima il caso in cui tutti i punti del corpo rigido  $\mathfrak{C}$  siano allineati.

**Proposizione 35.** *Se tutti i punti di  $\mathfrak{C}$  sono allineati, il suo insieme delle configurazioni è in corrispondenza biunivoca con l'insieme*

$$\mathbb{R}^3 \times S^2,$$

dove  $S^2$  è la sfera unitaria bidimensionale in  $\mathbb{R}^3$ .

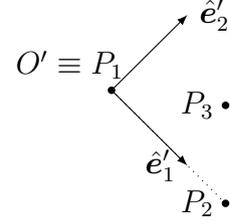
*Dimostrazione.* Dati i valori delle costanti  $c_{ij}$  in (6.1), per conoscere le posizioni di tutti i punti del corpo basta conoscere le posizioni di due di essi, ad esempio  $P_1, P_2$ . Le coordinate di ogni altro punto  $P_j$  di  $\mathfrak{C}$  sono determinate univocamente dalle costanti  $c_{1j}, c_{2j}$ . Per conoscere la posizione di  $P_1$  possiamo specificare le sue coordinate cartesiane in  $\mathbb{R}^3$  e, visto che la distanza tra  $P_1$  e  $P_2$  è la costante  $c_{12} \neq 0$ , per conoscere la posizione di  $P_2$  ci basta conoscere il versore  $\frac{P_2 - P_1}{|P_2 - P_1|}$ , che individua un punto della sfera  $S^2$ . □

### 6.2.2 Configurazioni di un corpo rigido con tre punti non allineati

Consideriamo adesso il caso in cui esistano tre punti del corpo non allineati. A meno di rinumerare i punti possiamo assumere che questi siano  $P_1, P_2, P_3$ . In questo caso, per descrivere le configurazioni del corpo ci serviamo del seguente strumento.

**Definizione 14.** Diciamo che un sistema di riferimento  $\Sigma' = O' \hat{e}'_1 \hat{e}'_2 \hat{e}'_3$  è **solidale** al corpo rigido  $\mathfrak{C}$  se i punti  $P_j$  del corpo hanno tutti velocità nulla rispetto a  $\Sigma'$ , cioè se le coordinate di tutti i punti  $P_j$  sono costanti in  $\Sigma'$ .

Possiamo costruire esplicitamente un sistema di riferimento solidale  $\Sigma' = O' \hat{e}'_1 \hat{e}'_2 \hat{e}'_3$  facendo uso dei punti non allineati  $P_1, P_2, P_3$ . Ad esempio, poniamo  $O' = P_1$ ,  $\hat{e}'_1 = (P_2 - P_1)/\rho_{12}$ ,  $\hat{e}'_2 \in \pi(P_1, P_2, P_3)$ , che è il piano generato dai tre punti, con  $\hat{e}'_2 \in \hat{e}'_1^\perp$  e  $(P_3 - P_1) \cdot \hat{e}'_2 > 0$ . Infine  $\hat{e}'_3 = \hat{e}'_1 \times \hat{e}'_2$ .



Le coordinate dei punti  $P_1, P_2, P_3$  sono chiaramente costanti in  $\Sigma'$ . Osserviamo anche che in tale riferimento le coordinate  $\mathbf{x}'_j$  di ogni altro punto  $P_j$  del corpo sono costanti.<sup>2</sup>

Diamo la seguente caratterizzazione dell'insieme delle configurazioni del corpo rigido.

**Proposizione 36.** Se  $\mathfrak{C}$  ha tre punti non allineati, il suo insieme delle configurazioni è in corrispondenza biunivoca con

$$\mathbb{R}^3 \times SO(3).$$

*Dimostrazione.* Sia  $\Sigma' = O' \hat{e}'_1 \hat{e}'_2 \hat{e}'_3$  un riferimento solidale a  $\mathfrak{C}$ . Assumendo che le coordinate (costanti)  $\mathbf{x}'_j$  dei punti  $P_j$  del corpo in  $\Sigma'$  siano note a priori, mostriamo che per determinare le coordinate  $\mathbf{x}_j$  dei  $P_j$  in  $\Sigma$  ci basta descrivere la posizione del riferimento  $\Sigma'$  rispetto a  $\Sigma$ . Questa è determinata dalle coordinate  $\mathbf{x}_{O'}$  dell'origine  $O'$  in  $\Sigma$  e dalla matrice  $R = (R_{kh})$  dei coseni direttori

$$R_{kh} = \hat{e}'_h \cdot \hat{e}_k$$

della terna  $\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3$  rispetto a  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ . La matrice  $R$ , che fornisce l'orientazione di  $\Sigma'$  rispetto a  $\Sigma$ , è ortogonale, e  $\det R = 1$  perché le due terne sono entrambe levogire, per cui  $R \in SO(3)$ . Notiamo che si ha

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}'_j, \quad j = 1 \dots N. \quad (6.3)$$

<sup>2</sup>Notiamo che le coordinate dei punti  $P_j$  ( $j \geq 4$ ) del corpo non sono univocamente determinate dalle costanti  $c_{1j}, c_{2j}, c_{3j}$  in quanto l'intersezione non vuota delle 3 sfere di centro  $P_i$  e raggio  $c_{ij}$ ,  $i = 1, 2, 3$  dà luogo genericamente a due punti. Comunque, la continuità del moto dei  $P_j$  implica che le loro coordinate  $\mathbf{x}'_j$  in  $\Sigma'$  siano costanti nel tempo.

Mostriamo adesso che la corrispondenza tra le possibili coordinate  $\mathbf{x}_j, j = 1, \dots, N$ , dei punti del corpo in  $\Sigma$  e l'insieme  $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$  è biunivoca. Assumiamo che  $P_1, P_2, P_3$  siano tre punti di  $\mathfrak{C}$  non allineati e definiamo la mappa

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \times SO(3) \rightarrow \mathbb{R}^9$$

tramite la relazione

$$\Phi(\mathbf{x}_{O'}, R) = (\mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}'_2, \mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}'_3). \quad (6.4)$$

Osserviamo che  $\Phi$  è iniettiva, infatti se

$$\mathbf{x}_{O'}^{(1)} + R_1\mathbf{x}'_j = \mathbf{x}_{O'}^{(2)} + R_2\mathbf{x}'_j, \quad j = 1, 2, 3$$

allora

$$R_1(\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}'_1) = R_2(\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}'_1), \quad R_1(\mathbf{x}'_3 - \mathbf{x}'_1) = R_2(\mathbf{x}'_3 - \mathbf{x}'_1)$$

con  $\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_3 - \mathbf{x}'_1$  vettori linearmente indipendenti. Ne segue che  $(R_2)^{-1}R_1$ , che è un elemento di  $SO(3)$ , ha due autovettori indipendenti relativi all'autovalore 1, dunque  $R_1 = R_2$  e di conseguenza  $\mathbf{x}_{O'}^{(1)} = \mathbf{x}_{O'}^{(2)}$ . □

Se sono note le coordinate  $\mathbf{x}'_j, j = 1, \dots, N$  dei punti  $P_j$  nel riferimento solidale  $\Sigma'$ , per descrivere le coordinate dei punti del corpo in  $\Sigma$  ci basta conoscere le coordinate in  $\Sigma$  di  $P_1, P_2, P_3$ . Infatti le coordinate dei punti  $P_j, j \geq 4$  si ottengono da (6.3) e vale il risultato seguente.

**Proposizione 37.** *Le coordinate  $\mathbf{x}_{O'}$  e la matrice di rotazione  $R$  si ottengono univocamente dalle coordinate  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$  e  $\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \mathbf{x}'_3$  dei punti  $P_1, P_2, P_3$  in  $\Sigma, \Sigma'$  rispettivamente.*

*Dimostrazione.* Poniamo

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, & \mathbf{v} &= \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1, & \mathbf{w} &= \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \\ \mathbf{u}' &= \mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}'_1, & \mathbf{v}' &= \mathbf{x}'_3 - \mathbf{x}'_1, & \mathbf{w}' &= \mathbf{u}' \times \mathbf{v}' \end{aligned}$$

e osserviamo che

$$\mathbf{u} = R\mathbf{u}', \quad \mathbf{v} = R\mathbf{v}', \quad \mathbf{w} = R\mathbf{u}' \times R\mathbf{v}' = R(\mathbf{u}' \times \mathbf{v}') = R\mathbf{w}'.$$

Considerando le matrici invertibili

$$A = [\mathbf{u}|\mathbf{v}|\mathbf{w}], \quad A' = [\mathbf{u}'|\mathbf{v}'|\mathbf{w}'],$$

che hanno per colonne rispettivamente i vettori  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  e  $\mathbf{u}', \mathbf{v}', \mathbf{w}'$ , si ottiene

$$A = RA',$$

da cui

$$R = A(A')^{-1}.$$

A questo punto il vettore  $\mathbf{x}_{O'}$  si può ricavare dalla prima delle (6.3). □

L'insieme  $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$  è una sottovarietà di  $\mathbb{R}^{12}$  di dimensione 6, infatti vale il seguente risultato.

**Proposizione 38.** *L'insieme  $O(3)$  è una sottovarietà di  $\mathbb{R}^9$  di dimensione 3.*

*Dimostrazione.* Considero la mappa  $\Psi : \mathbb{R}^9 \mapsto \mathbb{R}^6$  le cui componenti  $\Psi_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq j \leq 3$  sono definite da

$$\Psi_{ij}(\mathbf{a}) = \sum_{h=1}^3 a_{ih}a_{jh} - \delta_{ij},$$

dove  $\mathbf{a} = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33})$ . Se  $\mathbf{a}$  soddisfa  $\Psi(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ , allora la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

è ortogonale, cioè  $A \in O(3)$ . Abbiamo

$$\frac{\partial \Psi(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{bmatrix}.$$

Dette  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_6 \in \mathbb{R}^9$  le righe di  $\partial \Psi / \partial \mathbf{a}$ , la relazione

$$\sum_{j=1}^6 \lambda_j \mathbf{r}_j = \mathbf{0}, \tag{6.5}$$

con  $\lambda_1, \dots, \lambda_6 \in \mathbb{R}$ , può valere solo se i  $\lambda_j$  sono tutti nulli. Infatti (6.5) è un sistema di 9 equazioni scalari: dalle prime tre otteniamo

$$2\lambda_1 \mathbf{A}_1 + \lambda_2 \mathbf{A}_2 + \lambda_3 \mathbf{A}_3 = \mathbf{0},$$

dove  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$  sono le righe della matrice  $A$ , che sono linearmente indipendenti perché  $\det A = \pm 1$ , quindi  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ . Analogamente, dalle tre equazioni scalari intermedie otteniamo

$$2\lambda_2\mathbf{A}_1 + \lambda_4\mathbf{A}_2 + \lambda_5\mathbf{A}_3 = \mathbf{0},$$

quindi anche  $\lambda_4 = \lambda_5 = 0$  e dalle ultime tre equazioni si ha

$$2\lambda_3\mathbf{A}_1 + \lambda_5\mathbf{A}_2 + \lambda_6\mathbf{A}_3 = \mathbf{0},$$

quindi anche  $\lambda_6 = 0$ .

□

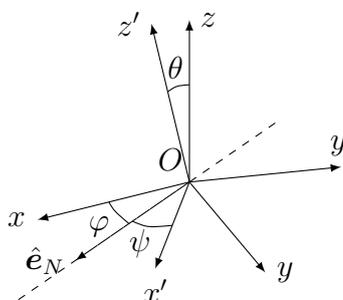
**Osservazione 21.**  $SO(3)$  è una componente connessa di  $O(3)$ , definita dalle matrici di  $O(3)$  con determinante 1. Ne segue che anche  $SO(3)$  è una sottovarietà di  $\mathbb{R}^9$  di dimensione 3.

### 6.2.3 Gli angoli di Eulero

Introduciamo delle coordinate locali sulla varietà  $SO(3)$  delle rotazioni in  $\mathbb{R}^3$ . Abbiamo visto che  $SO(3)$  corrisponde all'insieme delle configurazioni di un corpo rigido con un punto fisso, che abbia tre punti non allineati.

Sia  $\Sigma = Oxyz$  un riferimento fissato, con  $O$  il punto fisso del corpo ed  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  i versori degli assi di  $\Sigma$ . Sia inoltre  $\Sigma' = Ox'y'z'$  un riferimento solidale al corpo rigido, ed  $\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3$  i versori degli assi di  $\Sigma'$ . A meno di ruotare  $\Sigma$  si può assumere che il piano  $O\hat{e}_1\hat{e}_2$  non sia parallelo a  $O\hat{e}'_1\hat{e}'_2$ . Dall'intersezione dei due piani risulta definita una retta

$$r_N = \{\lambda\hat{e}_N, \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad \hat{e}_N = \frac{\hat{e}_3 \times \hat{e}'_3}{|\hat{e}_3 \times \hat{e}'_3|}$$



detta **linea dei nodi**.

Introduciamo le seguenti quantità:

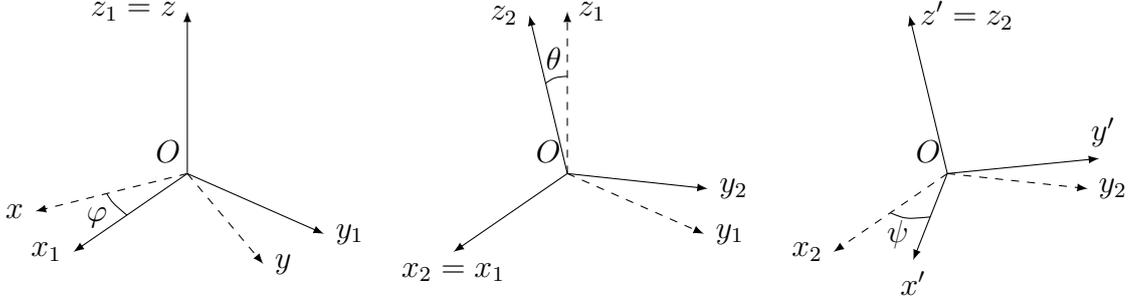
l'angolo  $\varphi$  tra  $\hat{e}_1$  e  $\hat{e}_N$  (angolo di precessione),

l'angolo  $\theta$  tra  $\hat{e}_3$  e  $\hat{e}'_3$  (angolo di nutazione),

l'angolo  $\psi$  tra  $\hat{e}_N$  e  $\hat{e}'_1$  (angolo di rotazione propria).

Le quantità  $\varphi, \psi, \theta$  si chiamano **angoli di Eulero**.

La rotazione che porta il riferimento  $\Sigma = Oxyz$  a coincidere con  $\Sigma' = Ox'y'z'$  si può effettuare tramite una successione di tre rotazioni, passando da sistemi di riferimento intermedi  $\Sigma_1 = Ox_1y_1z_1, \Sigma_2 = Ox_2y_2z_2$  (vedi figura).



Prima si fa una rotazione di  $\varphi$  attorno a  $Oz$ , in modo che l'asse  $Ox_1$  abbia la stessa orientazione di  $\hat{e}_N$ . Poi si esegue una rotazione di  $\theta$  attorno a  $Ox_1$  portando  $Oz$  in  $Oz_2 = Oz'$ . Infine si fa una rotazione di  $\psi$  attorno a  $Oz'$  per arrivare al riferimento  $\Sigma'$ .

Dette  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  ed  $\mathbf{u}' = (u'_1, u'_2, u'_3)$  le coordinate di un vettore  $\mathbf{u} \in \mathbb{V}^3$  nelle basi  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$  e  $\{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\}$  rispettivamente, vale la relazione

$$\mathbf{u} = R\mathbf{u}', \quad R = R_\varphi^{(3)} R_\theta^{(1)} R_\psi^{(3)}, \quad (6.6)$$

in cui  $R_\alpha^{(i)}$  è la matrice di rotazione di un angolo  $\alpha$  attorno all' $i$ -mo asse coordinato:

$$R_\alpha^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad R_\alpha^{(3)} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Proposizione 39.** Consideriamo un corpo rigido con tre punti  $P_1, P_2, P_3$  non allineati. La mappa

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \times SO(3) \rightarrow \mathbb{R}^9$$

definita da

$$\Phi(\mathbf{x}_{O'}, R) = (\mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}'_2, \mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}'_3),$$

dove  $\mathbf{x}'_j$  sono le coordinate dei punti  $P_j$  nel riferimento solidale, è un diffeomorfismo sull'immagine  $\Phi(\mathbb{R}^3 \times SO(3))$ .

*Dimostrazione.* Per la Proposizione 36 sappiamo già che la mappa  $\Phi$  è iniettiva. Sia  $\boldsymbol{\alpha} = (\psi, \theta, \varphi)$  il vettore degli angoli di Eulero, definito sull'aperto  $U \subset \mathbb{R}^3$ , che parametrizza localmente la varietà  $SO(3)$ . Considero la mappa

$$\chi : \mathbb{R}^3 \times U \rightarrow \Phi(\mathbb{R}^3 \times SO(3)) \subseteq \mathbb{R}^9$$

definita da

$$\boldsymbol{\chi}(\mathbf{x}_{O'}, \boldsymbol{\alpha}) = (\mathbf{x}_{O'} + R(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}_{O'} + R(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{x}'_2, \mathbf{x}_{O'} + R(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{x}'_3).$$

La sua matrice jacobiana è

$$\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial (\mathbf{x}_{O'}, \boldsymbol{\alpha})} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \frac{\partial R}{\partial \psi} \mathbf{x}'_1 & \frac{\partial R}{\partial \theta} \mathbf{x}'_1 & \frac{\partial R}{\partial \varphi} \mathbf{x}'_1 \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \frac{\partial R}{\partial \psi} \mathbf{x}'_2 & \frac{\partial R}{\partial \theta} \mathbf{x}'_2 & \frac{\partial R}{\partial \varphi} \mathbf{x}'_2 \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \frac{\partial R}{\partial \psi} \mathbf{x}'_3 & \frac{\partial R}{\partial \theta} \mathbf{x}'_3 & \frac{\partial R}{\partial \varphi} \mathbf{x}'_3 \end{bmatrix}.$$

Mostriamo che le colonne  $\mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_6$  di questa matrice sono linearmente indipendenti. Assumiamo che valga la relazione

$$\lambda_1 \mathbf{C}_1 + \dots + \lambda_6 \mathbf{C}_6 = \mathbf{0}, \quad (6.7)$$

per dei coefficienti reali  $\lambda_1, \dots, \lambda_6$ . L'equazione (6.7) è un sistema di 9 equazioni scalari. Facendo la differenza tra la quarta e la prima equazione in (6.7), tra la quinta e la seconda, tra la sesta e la terza, si ottiene l'equazione

$$A(\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}'_1) = \mathbf{0}, \quad (6.8)$$

in cui

$$A = \lambda_4 \frac{\partial R}{\partial \psi} + \lambda_5 \frac{\partial R}{\partial \theta} + \lambda_6 \frac{\partial R}{\partial \varphi}.$$

Usando le relazioni

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}'_j$$

la (6.8) si può scrivere

$$AR^T(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = \mathbf{0},$$

dove  $AR^T$  è una matrice antisimmetrica.<sup>3</sup> In modo simile, facendo la differenza tra la settima e la prima equazione, tra l'ottava e la seconda, tra la nona e la terza, si ottiene

$$A(\mathbf{x}'_3 - \mathbf{x}'_1) = AR^T(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1) = \mathbf{0}.$$

Poiché  $P_1, P_2, P_3$  non sono allineati, i vettori  $\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_3 - \mathbf{x}'_1$ , e quindi  $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1$ , sono linearmente indipendenti, quindi la matrice antisimmetrica  $AR^T$  deve essere necessariamente nulla, e dunque deve essere nulla anche la matrice  $A$ . Abbiamo adesso bisogno del seguente risultato.

<sup>3</sup>infatti le matrici  $\frac{\partial R}{\partial \psi} R^T, \frac{\partial R}{\partial \theta} R^T, \frac{\partial R}{\partial \varphi} R^T$  sono antisimmetriche, come si vede derivando rispetto a  $\psi, \theta, \varphi$  la relazione  $RR^T = I$ .

**Lemma 2.** *Sia*

$$R = R_\varphi^{(3)} R_\theta^{(1)} R_\psi^{(3)}$$

*definita come in (6.6). Allora la relazione*

$$\lambda_\psi \frac{\partial R}{\partial \psi} + \lambda_\theta \frac{\partial R}{\partial \theta} + \lambda_\varphi \frac{\partial R}{\partial \varphi} = \mathbf{0},$$

*con coefficienti reali  $\lambda_\psi, \lambda_\theta, \lambda_\varphi$ , implica che*

$$\lambda_\psi = \lambda_\theta = \lambda_\varphi = 0.$$

*Dimostrazione.* Omettendo la scritta (1) e (3) nelle matrici  $R_\psi^{(3)}, R_\theta^{(1)}, R_\varphi^{(3)}$ , indicando con un apice la derivata rispetto all'unica variabile da cui tali matrici dipendono, e osservando che

$$R_\psi^T R'_\psi = R_\varphi^T R'_\varphi = J^{(3)} := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.9)$$

$$R_\theta^T R'_\theta = J^{(1)} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.10)$$

si ottiene

$$\begin{aligned} & \lambda_\psi \frac{\partial R}{\partial \psi} + \lambda_\theta \frac{\partial R}{\partial \theta} + \lambda_\varphi \frac{\partial R}{\partial \varphi} = \lambda_\psi R_\varphi R_\theta R'_\psi + \lambda_\theta R_\varphi R'_\theta R_\psi + \lambda_\varphi R'_\varphi R_\theta R_\psi \\ &= \lambda_\psi R(R_\psi^T R'_\psi) + \lambda_\theta R R_\psi^T (R_\theta^T R'_\theta) R_\psi + \lambda_\varphi R R_\psi^T R_\theta^T (R_\varphi^T R'_\varphi) R_\theta R_\psi \\ &= R \left( \lambda_\psi J^{(3)} + \lambda_\theta R_\psi^T J^{(1)} R_\psi + \lambda_\varphi R_\psi^T R_\theta^T J^{(3)} R_\theta R_\psi \right) = 0. \end{aligned}$$

Svolgendo i conti l'equazione precedente si scrive

$$\begin{aligned} & \lambda_\psi \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_\theta \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 0 & -\cos \psi \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \end{bmatrix} \\ & + \lambda_\varphi \begin{bmatrix} 0 & -\cos \theta & \sin \theta \cos \psi \\ \cos \theta & 0 & \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \theta \cos \psi & \sin \theta \sin \psi & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$\lambda_\psi + \lambda_\varphi \cos \theta = 0, \quad (6.11)$$

$$\lambda_\theta \sin \psi - \lambda_\varphi \sin \theta \cos \psi = 0, \quad (6.12)$$

$$\lambda_\theta \cos \psi + \lambda_\varphi \sin \theta \sin \psi = 0. \quad (6.13)$$

Dalle equazioni (6.12),(6.13) si ottiene

$$\lambda_\theta = 0, \quad \lambda_\varphi \sin \theta = 0.$$

Affinché gli angoli di Eulero siano definiti ci deve essere una linea dei nodi, quindi  $\sin \theta \neq 0$ , per cui  $\lambda_\varphi = 0$ . Sostituendo l'ultima relazione in (6.11) si ottiene  $\lambda_\psi = 0$ .  $\square$

Dal lemma precedente si conclude che

$$\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0$$

e, sostituendo nella relazione (6.7), ne segue che

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

perché le colonne  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  sono linearmente indipendenti.  $\square$

**Esercizio 20.** Dimostrare che l'insieme delle configurazioni di un corpo rigido con tutti i punti allineati è una varietà diffeomorfa a

$$\mathbb{R}^3 \times S^2.$$

### 6.2.4 I quaternioni di Hamilton

Nel 1843 William Rowan Hamilton introdusse l'insieme dei **quaternioni** per poter operare in modo più agevole con le rotazioni di  $\mathbb{R}^3$ .

Un quaternione è un'espressione della forma

$$\mathbf{q} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \quad (6.14)$$

dove  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . I quaternioni si possono sommare e moltiplicare tra loro: la moltiplicazione è distributiva rispetto alla somma e i simboli  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  soddisfano le relazioni

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \quad \mathbf{ijk} = -1. \quad (6.15)$$

Dalle (6.15) si ottiene che

$$\begin{aligned} \mathbf{ij} &= \mathbf{k}, & \mathbf{jk} &= \mathbf{i}, & \mathbf{ki} &= \mathbf{j}, \\ \mathbf{ik} &= -\mathbf{j}, & \mathbf{ji} &= -\mathbf{k}, & \mathbf{kj} &= -\mathbf{i}. \end{aligned}$$

Dato un quaternionione  $\mathbf{q}$  della forma (6.14) introduciamo il suo **coniugato**

$$\bar{\mathbf{q}} = a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}.$$

La norma di  $\mathbf{q}$  si definisce come

$$\|\mathbf{q}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

e vale la proprietà

$$\|\mathbf{q}\| = \sqrt{\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}}}. \quad (6.16)$$

Dalla (6.16) segue che

$$\mathbf{q}^{-1} = \frac{\bar{\mathbf{q}}}{\|\mathbf{q}\|^2}.$$

Se  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ , allora il quaternionione  $a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$  si dice **unitario**. Utilizzeremo il simbolo  $\mathbf{u}$  al posto di  $\mathbf{q}$  per denotare quaternioni unitari. Possiamo identificare l'insieme dei quaternioni unitari con la sfera unitaria tridimensionale  $S^3$ . Osserviamo che si ha

$$\mathbf{u}^{-1} = \bar{\mathbf{u}}.$$

Un quaternionione della forma

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

si dice **puro**. Utilizzeremo il simbolo  $\mathbf{p}$  per denotare quaternioni puri. Possiamo identificare l'insieme dei quaternioni puri con  $\mathbb{R}^3$ .

Sia  $\mathbf{u}$  un quaternionione unitario. Consideriamo la mappa

$$\mathbb{R}^3 \ni \mathbf{p} \mapsto \mathbf{u}\mathbf{p}\bar{\mathbf{u}} =: R_{\mathbf{u}}\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3.$$

Si verifica facilmente che gli elementi dell'immagine di questa mappa sono quaternioni puri. Si può dimostrare che questa mappa codifica una rotazione di  $\mathbb{R}^3$ , vedi [12]. Sia

$$\mathbf{u} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}, \quad \text{con } |\mathbf{u}| = 1.$$

Se  $a = \pm 1$  allora  $R_{\mathbf{u}}$  è la rotazione identica. Altrimenti  $R_{\mathbf{u}}$  è la rotazione dell'angolo

$$\theta = 2 \arccos a = 2 \arcsin(\sqrt{b^2 + c^2 + d^2})$$

attorno all'asse orientato definito dal vettore  $(b, c, d)$ .

**Esercizio 21.** Mostrare che si ha

$$R_{\mathbf{u}}R_{\mathbf{v}} = R_{\mathbf{uv}},$$

dove  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  sono quaternioni unitari.

**Osservazione 22.** La mappa

$$S^3 \ni \mathbf{u} \mapsto R_{\mathbf{u}} \in SO(3)$$

è un omomorfismo di gruppi, con nucleo  $\mathbb{Z}_2$ , infatti quaternioni unitari opposti definiscono la stessa rotazione. Otteniamo quindi l'isomorfismo

$$S^3/\mathbb{Z}_2 \simeq SO(3).$$

**Esercizio 22.** Calcolare il vettore di  $\mathbb{R}^3$  che si ottiene ruotando  $(1, 2, 3)$  di un angolo  $\theta = \pi/3$  attorno all'asse passante per l'origine definito da  $(1, 0, 1)$ .

### La mappa di Hopf

Interpretando l'insieme dei quaternioni puri come  $\mathbb{R}^3$  (per cui ad esempio  $\mathbf{i}$  corrisponde a  $(1, 0, 0)$ ) definiamo la **mappa di Hopf**

$$S^3 \ni \mathbf{u} \mapsto \mathbf{u}i\bar{\mathbf{u}} \in S^2, \quad (6.17)$$

infatti l'immagine di questa mappa è un quaternione puro ed unitario. Se  $\mathbf{u} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$  allora (6.17) si scrive

$$(a, b, c, d) \mapsto (a^2 + b^2 - c^2 - d^2, 2(ad + bc), 2(bd - ac)).$$

Le fibre di questa mappa sono circonferenze e questa mappa fornisce un esempio di fibrazione non banale.<sup>4</sup>

## 6.2.5 Velocità angolare e formula fondamentale della cinematica rigida

**Definizione 15.** Definiamo la velocità angolare  $\vec{\omega}$  di un corpo rigido  $\mathcal{C}$  come quella di minima norma tra le velocità angolari di tutti i sistemi di riferimento solidali rispetto ad un riferimento dato  $\Sigma$ .

Verifichiamo che questa è una buona definizione. Si presentano due casi:

**Proposizione 40.** i) Se  $\mathcal{C}$  ha 3 punti non allineati allora la sua velocità angolare è quella di un qualunque riferimento solidale a  $\mathcal{C}$ . ii) Se invece tutti i punti di  $\mathcal{C}$  sono allineati allora la sua velocità angolare è data dalla differenza tra quella di un qualunque riferimento solidale a  $\mathcal{C}$  e la sua componente in direzione dell'allineamento dei punti.

<sup>4</sup>si può scrivere  $S^3$  come un fibrato con base  $S^2$  e fibre  $S^1$  che non è diffeomorfo al prodotto  $S^2 \times S^1$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo due riferimenti solidali  $\Sigma', \Sigma''$ . Denotiamo con  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{\omega}'$  le velocità angolari di  $\Sigma'$  rispetto a  $\Sigma$  e di  $\Sigma''$  rispetto a  $\Sigma'$  rispettivamente.

Caso i) La velocità angolare di  $\Sigma''$  rispetto a  $\Sigma$  è data da  $\vec{\omega} + \vec{\omega}'$ . Se  $P_1, P_2, P_3$  sono punti del corpo non allineati, dalla (4.6) applicata a  $P_2 - P_1$  e a  $P_3 - P_1$  si ha

$$\vec{\omega}' \times (P_2 - P_1) = \vec{0}, \quad \vec{\omega}' \times (P_3 - P_1) = \vec{0}, \quad (6.18)$$

infatti

$$\frac{d}{dt}(P_2 - P_1)\Big|_{\Sigma'} = \frac{d}{dt}(P_2 - P_1)\Big|_{\Sigma''} + \vec{\omega}' \times (P_2 - P_1)$$

e si ha

$$\frac{d}{dt}(P_2 - P_1)\Big|_{\Sigma'} = \frac{d}{dt}(P_2 - P_1)\Big|_{\Sigma''} = \vec{0}$$

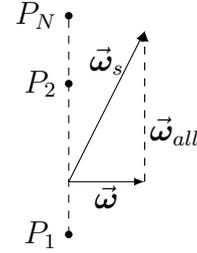
poiché  $P_1, P_2$  sono punti del corpo rigido, quindi hanno coordinate costanti sia in  $\Sigma'$  che in  $\Sigma''$ . La seconda relazione in (6.18) si dimostra in modo analogo. Dalle (6.18) segue che

$$\vec{\omega}' = \vec{0},$$

quindi le velocità angolari di  $\Sigma'$  e  $\Sigma''$  rispetto a  $\Sigma$  sono le stesse.

Caso ii) Si considerino due punti  $P_1, P_2$  del corpo. Dalla (4.6) abbiamo  $\vec{\omega}' \times (P_2 - P_1) = \vec{0}$ , quindi le velocità angolari di  $\Sigma'$  e  $\Sigma''$  possono differire solo per una componente lungo la direzione di allineamento.

Concludiamo che per ottenere la velocità angolare  $\vec{\omega}$  di minima norma tra quelle dei sistemi di riferimento solidali al corpo basta considerare la velocità angolare  $\vec{\omega}_s$  di un qualunque sistema di riferimento solidale e sottrarre da essa la sua componente  $\vec{\omega}_{all}$  lungo la direzione di allineamento dei punti.



□

**Definizione 16.** Diciamo che un punto  $P$  è *solidale* ad un corpo rigido  $\mathcal{C}$  se  $P$  ha velocità nulla in tutti i riferimenti  $\Sigma'$  solidali a  $\mathcal{C}$  che hanno velocità angolare di minima norma.

Per quanto detto prima, nel caso in cui  $\mathcal{C}$  abbia tre punti non allineati, affinché  $P$  sia un punto solidale basta che esso abbia velocità nulla in un qualunque riferimento solidale. Se invece tutti i punti di  $\mathcal{C}$  sono allineati serve che  $P$  abbia velocità nulla in un riferimento  $\Sigma'$  tale che la sua velocità angolare rispetto a  $\Sigma$  abbia in ogni istante componente nulla nella direzione dell'allineamento dei punti di  $\mathcal{C}$ .

**Proposizione 41.** Indichiamo con  $\vec{v}_h, \vec{v}_k \in \mathbb{V}^3$  le velocità di due punti  $P_h, P_k$  di un corpo rigido, o ad esso solidali, relative ad un riferimento  $\Sigma$ . Se il corpo è in moto con velocità angolare  $\vec{\omega}$  vale la formula

$$\vec{v}_k = \vec{v}_h + \vec{\omega} \times (P_k - P_h). \quad (6.19)$$

*Dimostrazione.* Denotando con  $\Sigma' = O'\hat{e}'_1\hat{e}'_2\hat{e}'_3$  un sistema di riferimento solidale al corpo, con velocità angolare  $\vec{\omega}$  di minima norma, e usando le relazioni (4.7) si ottiene

$$\begin{aligned} \vec{v}_k - \vec{v}_h &= \vec{v}'_k + \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times (P_k - O') - \vec{v}'_h - \vec{v}_{O'} - \vec{\omega} \times (P_h - O') \\ &= \vec{\omega} \times (P_k - P_h), \end{aligned}$$

in cui abbiamo usato il fatto che le velocità  $\vec{v}'_h, \vec{v}'_k$  di  $P_k, P_h$  relative a  $\Sigma'$  sono nulle.  $\square$

Le relazione (6.19) si chiama **formula fondamentale della cinematica rigida**.

**Esempio 8.** Calcoliamo la velocità angolare di un disco  $\mathcal{D}$  omogeneo di raggio  $R$  che si muove nel piano  $Oxy$ , rotolando senza strisciare sull'asse  $Ox$ . Usiamo come coordinata l'ascissa  $s$  del punto di contatto tra il disco e l'asse  $Ox$ .

Scelto un riferimento solidale con  $\hat{e}'_3 = \hat{e}_3$ , dall'Osservazione 24 abbiamo

$$\vec{\omega} = \omega \hat{e}_3, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

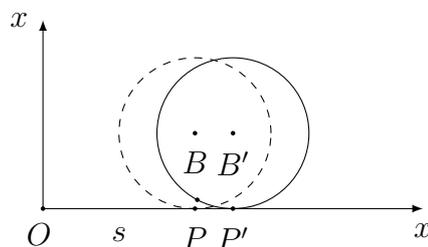
Poiché il disco rotola senza strisciare, la velocità  $\vec{v}_P$  del punto  $P$  del disco a contatto con l'asse  $Ox$  è nulla. Detto  $B$  il baricentro del disco, dalla formula fondamentale (6.19) si ottiene

$$\vec{0} = \vec{v}_P = \vec{v}_B + \omega \hat{e}_3 \times (P - B) = \dot{s} \hat{e}_1 - \omega \hat{e}_3 \times R \hat{e}_2 = (\dot{s} + \omega R) \hat{e}_1.$$

Si trova quindi che

$$\omega = -\frac{\dot{s}}{R}.$$

Nell'esempio precedente osserviamo in particolare che la velocità  $\vec{v}_P$  non corrisponde a quella del punto di contatto tra disco e asse  $Ox$ , che quando  $\vec{\omega} \neq \vec{0}$  è un punto diverso del disco da istante a istante (vedi figura seguente).



### 6.2.6 Velocità angolare e angoli di Eulero

Facendo riferimento alla notazione introdotta nella Sezione 6.2.3 dimostriamo la formula seguente.

**Proposizione 42.** *la velocità angolare di un corpo rigido si può scrivere in termini degli angoli di Eulero e delle loro derivate temporali come segue:*

$$\vec{\omega} = \dot{\psi} \hat{e}'_3 + \dot{\theta} \hat{e}_N + \dot{\varphi} \hat{e}_3. \quad (6.20)$$

*Dimostrazione.* La formula (6.20) segue dalla Proposizione 18, dall'Esempio 2 e dal modo in cui si può descrivere una rotazione con gli angoli di Eulero.

Riportiamo di seguito anche una dimostrazione diretta. Osserviamo che

$$\mathbf{e}'_i = R \mathbf{e}_i, \quad R = R_\varphi^{(3)} R_\theta^{(1)} R_\psi^{(3)},$$

con le matrici  $R_\alpha^{(i)}$  definite come in (6.6), per cui, omettendo la scritta (1) e (3) in queste matrici, si ha

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}'_i = \dot{R} \mathbf{e}_i &= (\dot{R}_\varphi R_\theta R_\psi + R_\varphi \dot{R}_\theta R_\psi + R_\varphi R_\theta \dot{R}_\psi) R_\psi^T R_\theta^T R_\varphi^T \mathbf{e}'_i = \\ &= [\dot{R}_\varphi R_\varphi^T + R_\varphi (\dot{R}_\theta R_\theta^T)] R_\psi^T + R_\varphi R_\theta (\dot{R}_\psi R_\psi^T) R_\theta^T R_\varphi^T \mathbf{e}'_i. \end{aligned}$$

Le matrici

$$\dot{R}_\varphi R_\varphi^T = \dot{\varphi} \frac{\partial R_\varphi}{\partial \varphi} R_\varphi^T, \quad \dot{R}_\theta R_\theta^T = \dot{\theta} \frac{\partial R_\theta}{\partial \theta} R_\theta^T, \quad \dot{R}_\psi R_\psi^T = \dot{\psi} \frac{\partial R_\psi}{\partial \psi} R_\psi^T,$$

sono antisimmetriche, come si vede derivando rispetto a  $\varphi, \theta, \psi$  le relazioni

$$R_\varphi R_\varphi^T = R_\theta R_\theta^T = R_\psi R_\psi^T = I,$$

e si ha

$$\frac{\partial R_\varphi}{\partial \varphi} R_\varphi^T = \frac{\partial R_\psi}{\partial \psi} R_\psi^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = J^{(3)}, \quad \frac{\partial R_\theta}{\partial \theta} R_\theta^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = J^{(1)},$$

in modo analogo a (6.9), (6.10). Inoltre le matrici

$$R_\varphi^T, \quad R_\theta^T R_\varphi^T$$

rappresentano rispettivamente il cambiamento di base da  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}_1$  e da  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}_2$ , con

$$\mathcal{B}_1 = \{\hat{\mathbf{e}}_N, \hat{\mathbf{e}}_\varphi, \hat{\mathbf{e}}_3\}, \quad \mathcal{B}_2 = \{\hat{\mathbf{e}}_N, \hat{\mathbf{e}}_\psi, \hat{\mathbf{e}}'_3\}$$

dove

$$\hat{\mathbf{e}}_N = \cos \psi \hat{\mathbf{e}}'_1 - \sin \psi \hat{\mathbf{e}}'_2 = \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_1 + \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_2, \quad (6.21)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_\varphi &= -\sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_1 + \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_2, \\ \hat{\mathbf{e}}_N^\perp &= \sin \psi \hat{\mathbf{e}}'_1 + \cos \psi \hat{\mathbf{e}}'_2, \end{aligned} \quad (6.22)$$

sono i versori degli assi  $Oy_1, Oy_2$  dei riferimenti intermedi  $\Sigma_1, \Sigma_2$  introdotti nella Sezione 6.2.3.

Usando la corrispondenza tra matrici antisimmetriche e vettori descritta in (4.2) notiamo che le matrici antisimmetriche

$$R_\varphi (\dot{R}_\theta R_\theta^T) R_\varphi^T, \quad R_\varphi R_\theta (\dot{R}_\psi R_\psi^T) R_\theta^T R_\varphi^T,$$

corrispondono rispettivamente, nella base  $\mathcal{B}$ , alla velocità angolare di un riferimento che ruota di un angolo  $\theta(t)$  attorno all'asse  $O\hat{\mathbf{e}}_N$  rispetto al riferimento  $\Sigma_1 = O\hat{\mathbf{e}}_N\hat{\mathbf{e}}_\varphi\hat{\mathbf{e}}_3$  e alla velocità angolare di un riferimento che ruota di un angolo  $\psi(t)$  attorno all'asse  $O\hat{\mathbf{e}}'_3$  rispetto al riferimento  $\Sigma_2 = O\hat{\mathbf{e}}_N\hat{\mathbf{e}}_N^\perp\hat{\mathbf{e}}'_3$ . La (6.20) segue allora dalle formule di Poisson.

□

Utilizzando il versore ausiliario  $\hat{\mathbf{e}}_\psi$ , definito da (6.22), che è ortogonale a  $\hat{\mathbf{e}}_N$  e giace nel piano generato da  $\hat{\mathbf{e}}_3, \hat{\mathbf{e}}'_3$ , possiamo scrivere

$$\hat{\mathbf{e}}_3 = \cos \theta \hat{\mathbf{e}}'_3 + \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_\psi. \quad (6.23)$$

Tramite la formula (6.20) possiamo quindi scrivere  $\vec{\omega}$  nella base  $\mathcal{B}' = \{\hat{\mathbf{e}}'_1, \hat{\mathbf{e}}'_2, \hat{\mathbf{e}}'_3\}$  come

$$\vec{\omega} = (\dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi) \hat{\mathbf{e}}'_1 + (\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi) \hat{\mathbf{e}}'_2 + (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \hat{\mathbf{e}}'_3. \quad (6.24)$$

### 6.2.7 Posizioni e velocità dei punti di un corpo rigido

Date le coordinate costanti  $\mathbf{x}'_1, \dots, \mathbf{x}'_N$  dei punti di un corpo rigido discreto in un riferimento solidale  $\Sigma'$ , le coordinate delle posizioni  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$  e delle velocità  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N$  di questi punti in  $\Sigma$  sono determinate ad ogni istante dalla posizione e velocità di un punto  $O'$  solidale al corpo, da una matrice  $R \in SO(3)$  e dalla velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$  del corpo:

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_{O'} + R \mathbf{x}'_j, \quad \mathbf{v}_j = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{O'}). \quad (6.25)$$

Le componenti della matrice di rotazione  $R$  possono essere espresse in funzione degli angoli di Eulero  $\varphi, \theta, \psi$ , e le componenti della velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$  in funzione di  $\varphi, \theta, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$ .

### 6.2.8 Asse istantaneo di rotazione

**Proposizione 43.** *Se  $\vec{\omega}(t) \neq \vec{0}$  è la velocità angolare di un corpo rigido all'istante  $t$ , allora esiste un'unica retta  $r(t)$ , detta **asse istantaneo di rotazione**, composta di punti solidali al corpo che hanno tutti velocità parallela ad  $\vec{\omega}(t)$  oppure nulla, cioè dai punti  $P$  solidali al corpo tali che*

$$\vec{v}_P \times \vec{\omega} = \vec{0}.$$

*Dimostrazione.* Osserviamo innanzitutto che dati due punti  $P, Q$  solidali al corpo, che all'istante  $t$  si trovano su una retta parallela ad  $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$ , per la formula fondamentale si ha

$$\vec{v}_P = \vec{v}_Q + \vec{\omega} \times (P - Q) = \vec{v}_Q$$

e dunque, in particolare,

$$\vec{v}_P \times \vec{\omega} = \vec{v}_Q \times \vec{\omega}.$$

Quindi ci basta dimostrare che all'istante  $t$  esiste un punto  $P_0$  solidale al corpo con  $\vec{v}_{P_0}$  parallela ad  $\vec{\omega}$  oppure nulla. L'asse istantaneo di rotazione corrisponderà allora alla retta passante per  $P_0$  e parallela a  $\vec{\omega}$ .

Siano  $O'$  un punto solidale al corpo e  $\Pi_{O'}$  il piano ortogonale a  $\vec{\omega}$  e passante per  $O'$ . Determiniamo un punto  $P_0 \in \Pi_{O'}$  solidale al corpo e tale che  $\vec{v}_{P_0} \times \vec{\omega} = \vec{0}$ . Moltiplichiamo vettorialmente per  $\vec{\omega}$  la formula fondamentale relativa a  $P_0$  e  $O'$ :

$$\vec{v}_{P_0} \times \vec{\omega} = \vec{v}_{O'} \times \vec{\omega} + (\vec{\omega} \times (P_0 - O')) \times \vec{\omega} = \vec{v}_{O'} \times \vec{\omega} + |\vec{\omega}|^2(P_0 - O'),$$

poiché  $(P_0 - O') \cdot \vec{\omega} = 0$ . Imponendo che la velocità di  $P_0$  sia parallela ad  $\vec{\omega}$  oppure nulla otteniamo

$$P_0 - O' = \frac{1}{|\vec{\omega}|^2} \vec{\omega} \times \vec{v}_{O'},$$

che individua il punto  $P_0$  cercato. Dalla dimostrazione costruttiva della sua esistenza segue anche l'unicità dell'asse istantaneo di rotazione.  $\square$

**Osservazione 23.** *La dimostrazione di questa proposizione è analoga a quella della Proposizione 5.11, relativa all'asse centrale: basta sostituire  $\vec{N}_{Q_0}$  con  $\vec{v}_{P_0}$  ed  $\vec{R}$  con  $\vec{\omega}$ .*

### 6.2.9 Campo delle velocità di un moto rigido

Il seguente risultato descrive globalmente il campo delle velocità di un moto rigido:

**Proposizione 44.** *Le velocità dei punti solidali al corpo rigido hanno una simmetria cilindrica rispetto all'asse istantaneo di rotazione.*

*Dimostrazione.* Assumiamo che  $\vec{\omega} \neq \vec{0}$  all'istante  $t$  e consideriamo l'asse istantaneo di rotazione  $r = r(t)$ . Per quanto mostrato nella Proposizione 43, ci basta mostrare che tale simmetria sussiste per i punti di un piano ortogonale all'asse  $r$ . Dato un punto  $P_1 \notin r$  definisco  $P_0 = r \cap \Pi_{P_1}$  dove  $\Pi_{P_1}$  è il piano passante per  $P_1$  e ortogonale a  $r$ . Dato un punto  $P_2$  sulla circonferenza di centro  $P_0$ , raggio  $|P_1 - P_0|$  e ortogonale a  $\vec{\omega}$  consideriamo l'applicazione lineare  $\mathcal{R}$  che corrisponde ad una rotazione attorno all'asse  $r$  tale che

$$P_2 = P_0 + \mathcal{R}(P_1 - P_0).$$

Per la (6.19) si ha

$$\vec{v}_{P_1} = \vec{v}_{P_0} + \vec{\omega} \times (P_1 - P_0), \quad \vec{v}_{P_2} = \vec{v}_{P_0} + \vec{\omega} \times (P_2 - P_0). \quad (6.26)$$

Siccome  $\vec{v}_{P_0}$  e  $\vec{\omega}$  sono paralleli all'asse,

$$\mathcal{R}\vec{v}_{P_1} = \vec{v}_{P_0} + \vec{\omega} \times \mathcal{R}(P_1 - P_0) = \vec{v}_{P_2}.$$

Inoltre dalla prima equazione in (6.26) segue che

$$\vec{v}_{P_1} \cdot (P_1 - P_0) = 0$$

poiché  $\vec{v}_{P_0} \times \vec{\omega} = \vec{0}$  e  $\vec{\omega} \times (P_1 - P_0) \cdot (P_1 - P_0) = 0$ .

Quindi, in coordinate cilindriche con asse  $r(t)$ , la componente radiale della velocità dei punti solidali al corpo rigido è nulla.

Consideriamo due punti  $P, Q$  qualunque solidali al corpo. Scomponiamo le loro velocità  $\vec{v}_P, \vec{v}_Q$  come somma di due vettori ortogonali:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_P^{\parallel} + \vec{v}_P^{\perp}, \quad \vec{v}_Q = \vec{v}_Q^{\parallel} + \vec{v}_Q^{\perp} \quad (6.27)$$

dove

$$\vec{v}_P^{\parallel} = \frac{(\vec{v}_P \cdot \vec{\omega})}{|\vec{\omega}|^2} \vec{\omega}, \quad \vec{v}_P^{\perp} = \vec{v}_P - \vec{v}_P^{\parallel}, \quad \vec{v}_Q^{\parallel} = \frac{(\vec{v}_Q \cdot \vec{\omega})}{|\vec{\omega}|^2} \vec{\omega}, \quad \vec{v}_Q^{\perp} = \vec{v}_Q - \vec{v}_Q^{\parallel}.$$

Dalla formula fondamentale (6.19) segue che

$$\vec{v}_P \cdot \vec{\omega} = \vec{v}_Q \cdot \vec{\omega}, \quad (6.28)$$

quindi le componenti  $\vec{v}_P^{\parallel}, \vec{v}_Q^{\parallel}$  lungo l'asse istantaneo di rotazione sono le stesse.

Dalla formula fondamentale (6.19) applicata ai punti  $P, Q$ , cancellando i due termini  $\vec{v}_P^{\parallel}, \vec{v}_Q^{\parallel}$ , che sono uguali per la (6.28), si ottiene

$$\vec{v}_P^{\perp} = \vec{v}_Q^{\perp} + \vec{\omega} \times (P - Q).$$

Nel caso particolare in cui  $Q$  sia un punto dell'asse istantaneo di rotazione si ha  $\vec{v}_Q^\perp = \vec{0}$ , per cui

$$\vec{v}_P^\perp = \vec{\omega} \times (P - Q).$$

Viste queste proprietà delle velocità dei punti di un corpo rigido, si parla di **atto di moto elicoidale**.<sup>5</sup>

□

### 6.3 Moti rigidi piani

Si parla di **moto rigido piano** se la velocità angolare  $\vec{\omega}$  è non nulla e ha direzione costante, e tutti i punti  $P$  solidali al corpo rigido hanno velocità ortogonale a tale direzione:

$$\vec{v}_P \cdot \vec{\omega} = 0.$$

In questo caso possiamo fissare un piano di riferimento  $\Pi$  ortogonale ad  $\vec{\omega}$  in cui studiare il moto.

**Osservazione 24.** In un moto rigido piano, se consideriamo un riferimento solidale al corpo rigido  $O'\hat{e}'_1\hat{e}'_2\hat{e}'_3$ , con  $\hat{e}'_3 = \hat{e}_3$ , ortogonale al piano di riferimento usato per studiare il moto, la sua velocità angolare  $\vec{\omega}$  sarà sempre parallela a  $O\hat{e}_3$ . Per dimostrarlo basta usare la formula di Poisson

$$\omega \times \hat{e}'_3 = \dot{\hat{e}}'_3 = \dot{\hat{e}}_3 = \mathbf{0}.$$

Quindi, nel caso di un corpo rigido con tutti i punti allineati, la velocità angolare di un riferimento solidale  $\Sigma'$  così scelto avrà sempre minima norma, in quanto la sua direzione sarà sempre ortogonale alla direzione di allineamento dei punti.

**Osservazione 25.** Consideriamo un moto rigido piano con il piano di riferimento  $\Pi$  ortogonale al vettore  $\hat{e}_3$  del sistema di riferimento  $\Sigma$ . Sia  $\theta$  l'angolo tra due rette giacenti nel piano  $\Pi$ , una solidale al corpo e l'altra fissa in  $\Sigma$  e assumiamo che  $\theta$  cresca quando la retta solidale ruota in senso antiorario attorno all'asse orientato  $O\hat{e}_3$ . La velocità angolare del corpo rigido che esegue questo moto rigido piano è data da

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{e}_3.$$

Per dimostrarlo basta scegliere un riferimento solidale  $\Sigma' = O'\hat{e}'_1\hat{e}'_2\hat{e}'_3$ , con  $\hat{e}'_1$  lungo la direzione della retta solidale,  $\hat{e}'_3 = \hat{e}_3$  ed  $\hat{e}'_2 = \hat{e}'_3 \times \hat{e}'_1$ . La dimostrazione prosegue come nell'Esempio 2. Osserviamo che la componente di traslazione di  $\Sigma'$ , data dal moto di  $O'$  rispetto a  $O$ , non conta nel calcolo di  $\vec{\omega}$ .

<sup>5</sup>l'atto di moto ad un dato istante è l'insieme di tutte le velocità a quell'istante.

### 6.3.1 Centro istantaneo di rotazione

Consideriamo un moto rigido piano con piano di riferimento  $\Pi$ . In ogni istante  $t$  tale che  $\vec{\omega}(t) \neq \vec{0}$  sia  $r(t)$  l'asse istantaneo di rotazione: definiamo il **centro istantaneo di rotazione** come il punto  $C_0(t) = r(t) \cap \Pi$ .

**Proposizione 45. (teorema di Chasles)** *In un moto rigido piano il centro istantaneo di rotazione  $C_0$  si trova sulla retta normale alla velocità di ciascuno dei punti solidali al corpo distinti da  $C_0$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $C_0$  il centro istantaneo di rotazione. Osserviamo che  $\vec{v}_{C_0} = \vec{0}$ , poiché  $\vec{v}_{C_0} \times \vec{\omega} = \vec{0}$ ,  $\vec{v}_{C_0} \cdot \vec{\omega} = 0$ . Quindi

$$(P - C_0) \cdot \vec{v}_P = (P - C_0) \cdot (\vec{v}_{C_0} + \vec{\omega} \times (P - C_0)) = 0$$

per ogni punto  $P$  solidale al corpo. □

Per le proprietà dell'asse istantaneo di rotazione possiamo concludere che in un moto rigido piano, ad ogni istante  $t$ , il centro istantaneo di rotazione  $C_0 = C_0(t)$  è l'unico punto solidale al corpo che ha velocità nulla. Tale punto è anche detto **centro delle velocità** all'istante  $t$ .

**Esercizio 23.** *In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento  $Oxy$ , con asse  $Oy$  verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico descritto in Figura 1, formato da un'asta omogenea di massa  $m$  e lunghezza  $\ell$ . L'estremo  $B$  dell'asta può scorrere sull'asse  $Ox$  e l'altro estremo  $A$  può scorrere su un circonferenza di raggio  $r < \ell$  centrata nell'origine.*

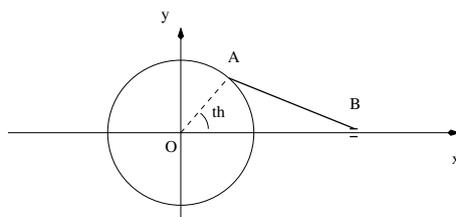


Figura 1

Usando come coordinata l'angolo  $\theta$  che  $OA$  forma con l'asse  $Ox$

- (i) calcolare la velocità angolare dell'asta;
- (ii) trovare le coordinate del centro istantaneo di rotazione.

### 6.3.2 Traiettorie polari

Consideriamo un moto rigido piano e denotiamo con  $\Pi$  il piano di riferimento. Fissiamo in tale piano un riferimento  $\Sigma = O\hat{e}_1\hat{e}_2$  ed un riferimento  $\Sigma' = O'\hat{e}'_1\hat{e}'_2$  solidale al corpo rigido.

Chiamiamo **base** (o polare fissa) la curva descritta dal centro istantaneo di rotazione  $C_0$  nel riferimento  $\Sigma$  e **rulletta** (o polare mobile) la curva descritta da  $C_0$  nel riferimento  $\Sigma'$ . Possiamo associare alla rulletta un moto rispetto al riferimento  $\Sigma$ , dato dal moto del corpo rigido stesso, visto che la rulletta è una curva solidale al corpo.

**Definizione 17.** Diciamo che due corpi rigidi rotolano senza strisciare l'uno sull'altro se le velocità dei punti dei corpi a contratto tra loro sono sempre le stesse. In particolare, si dice che un corpo rigido effettua un moto di puro rotolamento su un vincolo fisso se le velocità dei punti del corpo a contatto col vincolo sono nulle.

**Osservazione 26.** Nella definizione precedente incontriamo un altro caso di moto vincolato, quello di puro rotolamento, in cui viene data una condizione sulle velocità dei punti del sistema.

**Proposizione 46.** Durante il moto la rulletta rotola senza strisciare sulla base.

*Dimostrazione.* Ad ogni istante  $\bar{t}$  tale che  $\vec{\omega}(\bar{t}) \neq \vec{0}$  esiste un unico centro istantaneo di rotazione  $C_0$ . Dato il moto di un punto  $t \mapsto P(t)$  vale la relazione seguente

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{v}'_P + \vec{\omega} \times (P - O'), \quad (6.29)$$

in cui  $\vec{v}_P, \vec{v}'_P$  sono le velocità di  $P$  in  $\Sigma$  e  $\Sigma'$ ,  $\vec{v}_{O'}$  è la velocità dell'origine  $O'$  di  $\Sigma'$  e  $\vec{\omega}$  è la velocità angolare di  $\Sigma'$  rispetto a  $\Sigma$ .<sup>6</sup>

Consideriamo il moto  $t \mapsto P(t)$  del punto che rappresenta ad ogni istante il centro istantaneo di rotazione, visto in  $\Sigma$  e in  $\Sigma'$ . All'istante  $\bar{t}$  si ha

$$P = C_0.$$

Allo stesso punto possiamo attribuire tre velocità diverse al tempo  $\bar{t}$ : 1) la velocità  $\vec{v}_{C_0} = \vec{0}$  del centro delle velocità; 2) la velocità  $\vec{v}_P$  del punto  $P$  che rappresenta ad ogni istante il centro istantaneo di rotazione in  $\Sigma$ , che descrive la polare fissa; 3) la velocità  $\vec{v}'_P$  del punto  $P$  in  $\Sigma'$ , che descrive la polare mobile. Dalla formula fondamentale della cinematica rigida si ha

$$\vec{0} = \vec{v}_{C_0} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times (C_0 - O') \quad (6.30)$$

<sup>6</sup>si intende la velocità angolare di un riferimento rispetto all'altro completando entrambi i riferimenti con un versore comune  $\hat{e}_3 = \hat{e}'_3$  ortogonale al piano di riferimento  $\Pi$ .

e, usando la relazione

$$P = C_0$$

all'istante  $\bar{t}$  e sostituendo (6.30) in (6.29), si ottiene che

$$\vec{v}_P = \vec{v}'_P$$

a tale istante, quindi la base  $\mathfrak{b}$  e la rulletta  $\mathfrak{r}$  sono tangenti nel loro punto di contatto  $P = C_0$ . Essendo la rulletta solidale al corpo rigido, la velocità del suo punto  $C_0$  a contatto con la base è nulla, quindi si ha un moto di puro rotolamento di  $\mathfrak{r}$  su  $\mathfrak{b}$ . □

**Esempio 9.** Si calcolino la base e la rulletta nel caso di un'asta di lunghezza  $\ell$  che si può muovere in un piano mantenendo i due estremi  $A, C$  sugli assi coordinati di un sistema di riferimento  $\Sigma = O\hat{e}_1\hat{e}_2$ .

Introduciamo un sistema di riferimento  $\Sigma' = A\hat{e}'_1\hat{e}'_2$  solidale all'asta, con l'asse  $A\hat{e}'_1$  diretto lungo l'asta. Per il teorema di Chasles, le coordinate in  $\Sigma$  del centro istantaneo di rotazione  $C_0$  dell'asta sono

$$x_{C_0} = \ell \sin \theta, \quad y_{C_0} = \ell \cos \theta.$$

Ne segue che l'equazione della base è

$$x_{C_0}^2 + y_{C_0}^2 = \ell^2,$$

che è una circonferenza di raggio  $\ell$  centrata nell'origine  $O$ . Indicate con  $x'_{C_0}, y'_{C_0}$  le coordinate di  $C_0$  in  $\Sigma'$  si ha

$$\mathbf{x}_{C_0} = \mathbf{x}_A + R\mathbf{x}'_{C_0},$$

dove

$$\mathbf{x}_{C_0} = (x_{C_0}, y_{C_0})^T, \quad \mathbf{x}_A = (0, \ell \cos \theta)^T, \quad \mathbf{x}'_{C_0} = (x'_{C_0}, y'_{C_0})^T$$

ed

$$R = \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}$$

è la matrice con componenti  $R_{kh} = \hat{e}'_h \cdot \hat{e}_k$ .

Si ottiene che

$$x'_{C_0} = \ell \sin^2 \theta, \quad y'_{C_0} = \ell \sin \theta \cos \theta.$$

Dalla relazione precedente si ha

$$x'^2_{C_0} + y'^2_{C_0} = \ell^2 \sin^2 \theta = \ell x'_{C_0},$$

che si può anche scrivere

$$\left(x'_{C_0} - \frac{\ell}{2}\right)^2 + y'^2_{C_0} = \frac{\ell^2}{4},$$

ed è l'equazione di una circonferenza di raggio  $\ell/2$  centrata nel centro  $B$  dell'asta.

### 6.3.3 Profili coniugati

Consideriamo più in generale una curva piana  $c$  solidale al corpo rigido. Sia  $\gamma$  la curva che corrisponde all'involuppo della famiglia  $\{c_t\}_t$ , definita dal moto del corpo rigido al variare del tempo  $t$ .<sup>7</sup> Le curve  $c$  e  $\gamma$  si chiamano profili coniugati.

**Proposizione 47.** *La normale comune alle curve  $c$  e  $\gamma$  nel loro punto di contatto  $P$  passa ad ogni istante per il centro istantaneo di rotazione.*

*Dimostrazione.* Sia  $P$  il punto della curva  $c$  a contatto con  $\gamma$  e  $C_0$  il centro istantaneo di rotazione. Se  $P = C_0$  non c'è nulla da dimostrare. Se invece  $P \neq C_0$  possiamo assumere che il riferimento solidale abbia origine  $O' = P$  e, dalla relazione

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{v}'_P + \vec{\omega} \times (P - O'),$$

si ottiene

$$\vec{v}_{O'} = \vec{v}_P - \vec{v}'_P.$$

Osserviamo che  $\vec{v}_{O'} \neq \vec{0}$  perché  $O' \neq C_0$ . Siccome  $\gamma$  è l'involuppo della famiglia di curve  $\{c_t\}_t$  si ha  $\vec{v}_P \parallel \vec{v}'_P$ , quindi il vettore  $\vec{v}_{O'}$  è tangente alle curve  $c$  e  $\gamma$  in  $P$  e, per il teorema di Chasles, il centro istantaneo di rotazione  $C_0$  si trova sulla normale alle due curve passante da  $P$ .

□

### 6.3.4 Campo delle accelerazioni

Dato un moto rigido piano, sia  $\Sigma' = O'\hat{e}'_1\hat{e}'_2$  un sistema di riferimento solidale al corpo rigido nel piano di riferimento e sia  $\hat{e}'_3 = \hat{e}'_1 \times \hat{e}'_2$ . Per ogni punto  $P$  solidale al corpo, dalle (4.7), (4.8) si ottiene

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times (P - O'), \quad (6.31)$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{O'} + \dot{\vec{\omega}} \times (P - O') + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (P - O')) \quad (6.32)$$

poiché  $\vec{v}'_P = \vec{a}'_P = \vec{0}$ .

Dalla (6.32) si ottiene subito il seguente risultato:

**Proposizione 48. (teorema di Rivals)** *In un moto rigido piano l'accelerazione di qualsiasi punto  $P$  solidale al corpo rigido è data dalla somma dell'accelerazione di un dato punto  $O'$  solidale e dell'accelerazione che avrebbe  $P$  in un moto rotatorio con velocità angolare  $\vec{\omega}$  attorno alla normale al piano di riferimento per  $O'$ .*

Dalla stessa relazione si ottiene anche il seguente risultato:

<sup>7</sup>L'involuppo di una famiglia di curve  $\{c_t\}_t$  è una curva che è tangente in ogni suo punto ad una curva  $c_t$  della famiglia.

**Proposizione 49.** *Se  $\vec{\omega} \neq \vec{0}$ , esiste un unico punto solidale al corpo nel piano di riferimento, detto **centro delle accelerazioni**, la cui accelerazione è nulla.*

*Dimostrazione.* Annullando il membro destro della (6.32) si ottiene l'equazione

$$\vec{a}_{O'} + \dot{\vec{\omega}} \times (P - O') + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (P - O')) = \vec{0}.$$

Dette  $(x, y)$  le coordinate di  $P - O'$  in  $\Sigma$  si ottengono le equazioni

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{O'} - \dot{\omega}y - \omega^2x &= 0 \\ \ddot{y}_{O'} + \dot{\omega}x - \omega^2y &= 0 \end{aligned}$$

per le coordinate  $(\ddot{x}_{O'}, \ddot{y}_{O'})$  dell'accelerazione  $\vec{a}_{O'}$  in  $\Sigma$ , e queste equazioni hanno un'unica soluzione poiché  $\omega^4 + \dot{\omega}^2 \neq 0$ . □

## 6.4 Operatore di inerzia

Per studiare il moto di un corpo rigido  $\mathfrak{C}$  è utile introdurre l'**operatore di inerzia**<sup>8</sup>  $\mathfrak{I}_Q : \mathbb{V}^3 \rightarrow \mathbb{V}^3$  rispetto al polo  $Q \in \mathbb{E}^3$ , definito da

$$\mathfrak{I}_Q \vec{u} = \sum_{h=1}^N m_h (P_h - Q) \times [\vec{u} \times (P_h - Q)], \quad \vec{u} \in \mathbb{V}^3.$$

**Proposizione 50.** *Per ogni scelta del polo  $Q$  l'applicazione bilineare*

$$\mathbb{V}^3 \times \mathbb{V}^3 \ni (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} \cdot \mathfrak{I}_Q \vec{v} \in \mathbb{R}$$

*è simmetrica e, se il corpo  $\mathfrak{C}$  ha tre punti non allineati, è definita positiva.*

*Dimostrazione.* Dalle proprietà del prodotto misto e dalla simmetria del prodotto scalare abbiamo la simmetria dell'operatore  $\mathfrak{I}_Q$ , infatti

$$\vec{u} \cdot \mathfrak{I}_Q \vec{v} = \sum_{h=1}^N m_h [\vec{u} \times (P_h - Q)] \cdot [\vec{v} \times (P_h - Q)] = \vec{v} \cdot \mathfrak{I}_Q \vec{u}.$$

Similmente si ha

$$\vec{u} \cdot \mathfrak{I}_Q \vec{u} = \sum_{h=1}^N m_h |\vec{u} \times (P_h - Q)|^2$$

---

<sup>8</sup>detto anche **tensore di inerzia**.

e, se ci sono tre punti non allineati, almeno un addendo della sommatoria è strettamente positivo.<sup>9</sup> Se tutti i punti del corpo sono allineati ed  $\hat{e} \in \mathbb{V}^3$ ,  $|\hat{e}| = 1$ , corrisponde alla direzione della retta di allineamento, allora  $\hat{e} \cdot \mathfrak{I}_Q \hat{e} = 0$  se  $Q$  sta su tale retta.<sup>10</sup>

□

## Scomposizione dell'operatore di inerzia

Si verifica facilmente che

$$\mathfrak{I}_Q \vec{u} = \mathfrak{I}_B \vec{u} + m(B - Q) \times [\vec{u} \times (B - Q)], \quad \forall \vec{u} \in \mathbb{V}^3, \quad (6.33)$$

infatti, usando la scomposizione  $P_h - Q = (P_h - B) + (B - Q)$  si ottiene

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_Q \vec{u} &= \sum_{h=1}^N m_h (P_h - Q) \times [\vec{u} \times (P_h - Q)] = \\ &= \sum_{h=1}^N m_h (P_h - B) \times [\vec{u} \times (P_h - B)] + \sum_{h=1}^N m_h (B - Q) \times [\vec{u} \times (P_h - B)] + \\ &+ \sum_{h=1}^N m_h (P_h - B) \times [\vec{u} \times (B - Q)] + \sum_{h=1}^N m_h (B - Q) \times [\vec{u} \times (B - Q)] \end{aligned}$$

e si ha

$$\sum_{h=1}^N m_h (B - Q) \times [\vec{u} \times (P_h - B)] = \sum_{h=1}^N m_h (P_h - B) \times [\vec{u} \times (B - Q)] = \vec{0}.$$

Dati un punto  $Q \in \mathbb{E}^3$  ed una direzione  $\hat{e} \in \mathbb{V}^3$ ,  $|\hat{e}| = 1$ , definiamo **momento di inerzia relativo all'asse  $Q\hat{e}$** , passante da  $Q$  e parallelo a  $\hat{e}$ , la quantità

$$I_{Q\hat{e}} = \hat{e} \cdot \mathfrak{I}_Q \hat{e}.$$

Osserviamo che se  $Q'$  è un qualsiasi altro punto dell'asse  $Q\hat{e}$  si ha

$$\begin{aligned} I_{Q'\hat{e}} &= \sum_{h=1}^N m_h |\hat{e} \times (P_h - Q')|^2 = \sum_{h=1}^N m_h |\hat{e} \times [(P_h - Q) + (Q - Q')]|^2 \\ &= \sum_{h=1}^N m_h |\hat{e} \times (P_h - Q)|^2 = I_{Q\hat{e}}, \end{aligned}$$

<sup>9</sup>infatti ci sono almeno 2 vettori  $(P_i - Q)$ ,  $(P_j - Q)$  linearmente indipendenti e quindi  $\max\{|\vec{u} \times (P_i - Q)|, |\vec{u} \times (P_j - Q)|\} > 0, \forall \vec{u} \neq \vec{0}$ .

<sup>10</sup>infatti in questo caso  $\hat{e} \times (P_h - Q) = \vec{0}$  per ogni  $h$ .

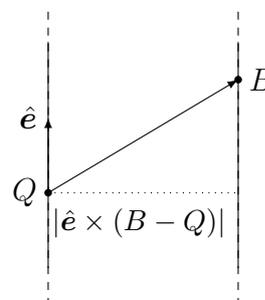
quindi il momento di inerzia  $I_{Q\hat{e}}$  non dipende dal particolare polo  $Q$  scelto sull'asse. Abbiamo il seguente

**Proposizione 51. (Huygens-Steiner)** *Vale la seguente proprietà:*

$$I_{Q\hat{e}} = I_{B\hat{e}} + m|\hat{e} \times (B - Q)|^2, \quad (6.34)$$

in cui  $B$  è il baricentro del corpo rigido.

*Dimostrazione.* Il risultato si ottiene subito calcolando  $\hat{e} \cdot \mathfrak{I}_Q \hat{e}$  tramite la (6.33). □



**Osservazione 27.** *Dalla (6.34) segue che*

$$I_{B\hat{e}} = \min_{Q \in \mathbb{E}^3} I_{Q\hat{e}}.$$

La relazione (6.34) si chiama **teorema di Huygens-Steiner**.

## Matrice di inerzia

Fissata una base ortonormale  $\{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\}$ , l'operatore di inerzia  $\mathfrak{I}_Q$  si scrive tramite la seguente matrice

$$I_Q = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix}, \quad I_{ij} = \hat{e}'_i \cdot \mathfrak{I}_Q \hat{e}'_j.$$

Più precisamente, posto

$$P_h - Q = x_h \hat{e}'_1 + y_h \hat{e}'_2 + z_h \hat{e}'_3, \quad h = 1, \dots, N, \quad (6.35)$$

si ha

$$\begin{aligned} I_{11} &= \sum_{h=1}^N m_h (y_h^2 + z_h^2); & I_{22} &= \sum_{h=1}^N m_h (x_h^2 + z_h^2); & I_{33} &= \sum_{h=1}^N m_h (x_h^2 + y_h^2); \\ I_{12} &= - \sum_{h=1}^N m_h x_h y_h; & I_{13} &= - \sum_{h=1}^N m_h x_h z_h; & I_{23} &= - \sum_{h=1}^N m_h y_h z_h. \end{aligned}$$

Infatti

$$I_{ij} = \sum_{h=1}^N m_h \hat{e}'_i \times (P_h - Q) \cdot \hat{e}'_j \times (P_h - Q),$$

con

$$\begin{aligned}\hat{e}'_1 \times (P_h - Q) &= y_h \hat{e}'_3 - z_h \hat{e}'_2, \\ \hat{e}'_2 \times (P_h - Q) &= z_h \hat{e}'_1 - x_h \hat{e}'_3, \\ \hat{e}'_3 \times (P_h - Q) &= x_h \hat{e}'_2 - y_h \hat{e}'_1.\end{aligned}$$

## Simmetrie e momenti principali di Inerzia

**Definizione 18.** *Gli autovalori dell'operatore  $\mathfrak{I}_Q$  si chiamano **momenti principali di inerzia** e le direzioni degli autovettori si dicono **direzioni principali di inerzia**.*

Più semplicemente si parlerà anche di momenti e direzioni principali.

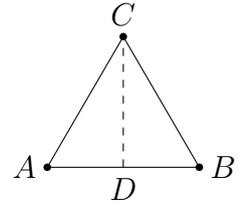
La matrice di inerzia è simmetrica, dunque per il teorema spettrale essa è diagonalizzabile in una base ortonormale  $\{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\}$ . Possiamo quindi trovare una matrice di cambiamento di base  $R$  che corrisponda ad una rotazione e che porti la matrice di inerzia in forma diagonale, cioè

$$RI_QR^T = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix},$$

dove  $I_1, I_2, I_3$  sono i momenti principali di inerzia. Una base  $\{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\}$  in cui  $I_Q$  si scrive in forma diagonale si dice **base principale** (di inerzia).

**Osservazione 28.** *Dato un corpo rigido, il fatto che  $\mathcal{B}$  sia una base principale per l'operatore di inerzia  $\mathfrak{I}_Q$  dipende dalla scelta del polo  $Q$ .*

Si consideri ad esempio un corpo rigido formato da tre masse uguali  $m$  poste ai vertici  $A, B, C$  di un triangolo equilatero  $\mathcal{T}$  di lato  $\ell$ . Sia  $D$  il punto medio del lato  $AB$  e  $h$  l'altezza di  $\mathcal{T}$ . Mostriamo che il segmento  $AB$  individua una direzione principale di inerzia per  $\mathfrak{I}_D$ , ma non per  $\mathfrak{I}_A$ . Osserviamo che la direzione ortogonale al piano di  $\mathcal{T}$  è sempre principale, qualunque sia il polo  $Q$  scelto nel piano di  $\mathcal{T}$ .



Infatti, scelta la base  $\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3$  con

$$\hat{e}'_1 = \frac{B - A}{|B - A|}, \quad \hat{e}'_3 = \frac{(B - A) \times (C - A)}{|(B - A) \times (C - A)|}, \quad \hat{e}'_2 = \hat{e}'_3 \times \hat{e}'_1$$

si ha sempre

$$I_{13} = I_{23} = 0$$

perché la terza coordinata di tutti i punti del corpo è nulla. Si ha inoltre, con ovvio significato dei simboli,

$$I_{12}^D = \hat{e}'_1 \cdot \mathfrak{I}_D \hat{e}'_2 = 0,$$

perché se l'origine delle coordinate è  $D$ , cioè se poniamo  $Q = D$  nella (6.35), si ha

$$x_A = -x_B, \quad x_C = y_A = y_B = 0.$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} I_{12}^A &= \hat{e}'_1 \cdot \mathfrak{I}_A \hat{e}'_2 = \hat{e}'_1 \cdot [m(B-A) \times (\hat{e}'_2 \times (B-A)) + m(C-A) \times (\hat{e}'_2 \times (C-A))] \\ &= m \hat{e}'_1 \cdot [|B-A|^2 \hat{e}'_2 - [(B-A) \cdot \hat{e}'_2](B-A) + |C-A|^2 \hat{e}'_2 - [(C-A) \cdot \hat{e}'_2](C-A)] \\ &= -m[(C-A) \cdot \hat{e}'_1][(C-A) \cdot \hat{e}'_2] = -\frac{\sqrt{3}}{4} m \ell^2 \neq 0. \end{aligned}$$

Si può fare anche un ragionamento qualitativo: si ha  $I_{12} = -\sum_h m_h x_h y_h$ , con  $h \in \{A, B, C\}$ , inoltre  $x_C, y_C > 0$  e  $x_A, y_A, x_B, y_B \geq 0$ .

Dimostriamo alcune proprietà dei momenti e degli assi principali di inerzia.

**Proposizione 52.** *Valgono le seguenti proprietà:*

- (i) *Se esiste un piano  $\Pi$  di simmetria per riflessione (cioè, detta  $\tilde{\mathcal{R}} : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$  la riflessione rispetto a  $\Pi$ , ad ogni punto  $P \notin \Pi$  di massa  $m$  del corpo corrisponde un altro punto  $\tilde{\mathcal{R}}P$  del corpo con la stessa massa) allora la direzione ortogonale al piano  $\Pi$  è principale per  $\mathfrak{I}_Q$ , dove  $Q$  è un qualunque punto di  $\Pi$ .*
- (ii) *Se esiste un asse  $r$  di simmetria per rotazione (cioè, per ogni punto  $P \notin r$  di massa  $m$  del corpo esiste un intero  $k > 1$  tale che, detta  $\mathcal{R}_k : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$  la rotazione di  $2\pi/k$  attorno ad  $r$ , i punti dell'orbita  $\{\mathcal{R}_k^h P\}_{h=0, \dots, k-1}$  di  $P$  sotto l'azione del gruppo ciclico generato da  $\mathcal{R}_k$  corrispondono ad altri punti del corpo con la stessa massa  $m$ ; le orbite devono essere disgiunte) allora la direzione dell'asse  $r$  è principale per  $\mathfrak{I}_Q$ , dove  $Q$  è un qualunque punto di  $r$ .*

*Inoltre, se  $\{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\}$  è una base principale per  $\mathfrak{I}_Q$ ,*

- (iii) *I momenti principali di inerzia di  $\mathfrak{I}_Q$  soddisfano  $I_1 \leq I_2 + I_3$  e si ha  $I_1 = I_2 + I_3$  solo quando il corpo rigido è piano, e sta nel piano  $Q\hat{e}'_2\hat{e}'_3$ . Valgono due proprietà analoghe ottenute permutando ciclicamente gli indici 1, 2, 3.*
- (iv) *Sia  $\vec{v}$  un autovettore di  $\mathfrak{I}_Q$  con autovalore  $\lambda$ .*
  1. *Se  $\vec{v} = v_i \hat{e}'_i + v_j \hat{e}'_j$ ,  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ,  $i \neq j$  e  $v_i v_j \neq 0$ , allora tutti i vettori del piano generato da  $\hat{e}'_i, \hat{e}'_j$  definiscono direzioni principali di inerzia con lo stesso valore  $\lambda = I_i = I_j$  del momento principale.*

2. Se  $\vec{v} = \sum_{j=1}^3 v_j \hat{e}'_j$ ,  $v_j \neq 0 \forall j$ , allora  $\mathfrak{I}_Q$  è un multiplo dell'identità, quindi tutte le direzioni sono principali.

*Dimostrazione.* (i) Consideriamo un riferimento  $Q\hat{e}'_1\hat{e}'_2\hat{e}'_3$ , dove  $Q$  è un punto del piano  $\Pi$  e l'asse  $Q\hat{e}'_3$  è ortogonale a  $\Pi$ . Osserviamo che  $I_{13} = I_{23} = 0$  perché, dette  $x_h, y_h, z_h$  le coordinate di un punto  $P_h$  del corpo, se  $z_h = 0$  (cioè se  $P_h \notin \Pi$ ) questo non contribuisce alla somma che definisce  $I_{13}, I_{23}$ . Se invece  $z_h \neq 0$  esiste un altro punto  $P_k$  del corpo con la stessa massa e tale che  $x_h = x_k, y_h = y_k, z_h = -z_k$ , quindi i contributi dei due punti a  $I_{13}, I_{23}$  sono opposti.

(ii) Consideriamo un riferimento  $Q\hat{e}'_1\hat{e}'_2\hat{e}'_3$ , dove  $Q$  è un punto dell'asse  $r$  e  $Q\hat{e}'_3 = r$ . Dimostriamo che il numero complesso  $I_{13} + iI_{23}$  è nullo, dove  $i$  è l'unità immaginaria. Osserviamo che se  $P_h \in r$  questo punto non contribuisce a  $I_{13} + iI_{23}$ . Inoltre possiamo trovare  $s$  interi  $k_1, \dots, k_s$ , dove ogni  $k_j$  è  $\geq 1$  e  $\sum_{j=1}^s k_j = N$ , tali che

$$I_{13} + iI_{23} = - \sum_{h=1}^N m_h (x_h + iy_h) z_h = - \sum_{j=1}^s m_j z_j \sum_{l=0}^{k_j-1} \omega_{k_j}^l (x_j + iy_j) \quad (6.36)$$

dove  $\omega_{k_j} = e^{2\pi i/k_j}$  è una radice  $k_j$ -ma primitiva dell'unità. Nella (6.36) abbiamo raggruppato le coordinate dei punti che corrispondono ad una stessa orbita generata da  $\mathcal{R}_k$ , che quindi hanno la stessa componente  $z_j$  e la stessa massa  $m_j$ . Si conclude utilizzando il fatto che per ogni  $k \in \mathbb{N}$  si ha

$$\sum_{h=0}^{k-1} \omega_k^h = \frac{\omega_k^k - 1}{\omega_k - 1} = 0.$$

(iii) Segue direttamente dalle formule per  $I_{jj}, j = 1, 2, 3$ .

(iv) Dalle relazioni  $\mathfrak{I}_Q \hat{e}'_j = I_j \hat{e}'_j$ ,  $\vec{v} = \sum_{k=1}^3 v_k \hat{e}'_k$  si ha

$$\sum_{k=1}^3 v_k I_k \hat{e}'_k = \mathfrak{I}_Q \vec{v} = \lambda \vec{v} = \sum_{k=1}^3 v_k \lambda \hat{e}'_k.$$

Dall'unicità della rappresentazione di un vettore come combinazione lineare degli elementi della base abbiamo  $\lambda = I_k$  se  $v_k \neq 0$ . Da qui segue la tesi, infatti se  $\mathfrak{I}_Q \hat{e}'_i = \lambda \hat{e}'_i$ ,  $\mathfrak{I}_Q \hat{e}'_j = \lambda \hat{e}'_j$ , con  $i \neq j$  allora ogni combinazione lineare  $\alpha \hat{e}'_i + \beta \hat{e}'_j$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ) è un autovettore di  $\mathfrak{I}_Q$  con autovalore  $\lambda$ :

$$\mathfrak{I}_Q(\alpha \hat{e}'_i + \beta \hat{e}'_j) = \alpha \lambda \hat{e}'_i + \beta \lambda \hat{e}'_j = \lambda(\alpha \hat{e}'_i + \beta \hat{e}'_j).$$

Se inoltre troviamo un autovettore  $\vec{v} = \sum_{j=1}^3 v_j \hat{e}'_j$  con  $v_1 v_2 v_3 \neq 0$  allora  $I_1 = I_2 = I_3$  e la matrice di inerzia è un multiplo dell'identità. □

**Esercizio 24.** Consideriamo un corpo rigido costituito da  $N$  punti di uguale massa  $m$ , posti ai vertici di uno dei cinque poliedri platonici, cioè il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro ( $N$  può essere uguale a 4, 8, 12). Dimostrare che ogni direzione è principale per l'operatore di inerzia  $\mathfrak{I}_B$  relativo al baricentro  $B$ .

## 6.5 Momento angolare ed energia cinetica di un corpo rigido

Fissiamo un riferimento  $\Sigma = O \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$ . Dato un corpo rigido  $\mathfrak{C}$ , usando la formula fondamentale (6.19) troviamo

$$\vec{M}_Q = \sum_{h=1}^N m_h (P_h - Q) \times [\vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times (P_h - O')] = \quad (6.37)$$

$$\begin{aligned} &= m(B - Q) \times \vec{v}_{O'} + \mathfrak{I}_Q \vec{\omega} + m(B - Q) \times [\vec{\omega} \times (Q - O')] \quad (6.38) \\ &= m(B - Q) \times \vec{v}_Q + \mathfrak{I}_Q \vec{\omega}. \end{aligned}$$

Osserviamo che nella (6.37) le velocità  $\vec{v}_{O'}$ ,  $\vec{v}_Q$  sono quelle di punti solidali a  $\mathfrak{C}$ . Se  $\vec{v}_Q = \mathbf{0}$  oppure se scegliamo  $Q = B$  la formula (6.37) si semplifica in

$$\vec{M}_Q = \mathfrak{I}_Q \vec{\omega}.$$

Analogamente, utilizzando la (6.19) possiamo anche rappresentare l'energia cinetica come

$$T = \frac{1}{2} m |\vec{v}_{O'}|^2 + m \vec{\omega} \cdot (B - O') \times \vec{v}_{O'} + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathfrak{I}_{O'} \vec{\omega}.$$

Se scegliamo  $O' = B$  otteniamo la versione per i corpi rigidi del teorema di König:

$$T = \frac{1}{2} m |\vec{v}_B|^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathfrak{I}_B \vec{\omega}. \quad (6.39)$$

Se  $\vec{v}_{O'} = \vec{0}$  otteniamo

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathfrak{I}_{O'} \vec{\omega}.$$

## 6.6 Corpi rigidi continui

Si distinguono corpi continui a 1, 2 e 3 dimensioni, a cui si attribuiscono rispettivamente una densità lineare, di superficie e di volume, denotate con  $\lambda$ ,  $\sigma$ ,  $\rho$ . La

discussione relativa a questi tre casi altri casi è simile: consideriamo l'ultimo caso, che è il più generale. Sia

$$\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \quad \mathbf{x}' \mapsto \rho(\mathbf{x}')$$

la densità di volume, dove  $\mathbf{x}'$  sono coordinate in un riferimento solidale  $\Sigma'$ . Assumiamo che  $\rho$  sia una funzione integrabile sull'insieme  $C \subset \mathbb{R}^3$  delle coordinate dei punti del corpo relative a  $\Sigma'$ . Se il corpo rigido non è soggetto ad altri vincoli, una parametrizzazione locale dell'insieme delle configurazioni del corpo è data dalla mappa

$$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{q} \mapsto \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}; \mathbf{x}') = \mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^3, \quad (6.40)$$

con  $\mathbf{q} = (\mathbf{x}_{O'}, \boldsymbol{\alpha})$  ed  $R = R(\boldsymbol{\alpha})$ , dove  $\boldsymbol{\alpha} = (\varphi, \theta, \psi)$  sono gli angoli di Eulero (vedi Sezione 6.2.3).

Le velocità dei punti del corpo si ottengono dalla mappa (6.40) e dalla formula fondamentale (6.19):

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mapsto \mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}') &= \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}; \mathbf{x}') - \mathbf{x}_{O'}) \\ &= \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^3, \end{aligned} \quad (6.41)$$

con  $\dot{\mathbf{q}} = (\mathbf{v}_{O'}, \dot{\boldsymbol{\alpha}})$ ,  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}})$ .

Introduciamo le definizioni delle quantità dinamiche sostituendo alla somma finita del caso discreto l'integrale sull'insieme  $C$  occupato dal corpo:<sup>11</sup>

MASSA TOTALE

$$m = \int_C \rho(\mathbf{x}') d\mathbf{x}',$$

BARICENTRO

$$m(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_{O'}) = \int_C \rho(\mathbf{x}') R\mathbf{x}' d\mathbf{x}' = R \int_C \rho(\mathbf{x}') \mathbf{x}' d\mathbf{x}', \quad (6.42)$$

**Osservazione 29.** Se  $O' = B$  si ottiene

$$\int_C \rho(\mathbf{x}') \mathbf{x}' d\mathbf{x}' = \mathbf{0}.$$

QUANTITÀ DI MOTO

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \int_C \rho(\mathbf{x}') \mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \int_C \rho(\mathbf{x}') (\mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \\ &= m\mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times R \int_C \rho(\mathbf{x}') \mathbf{x}' d\mathbf{x}' = m\mathbf{v}_{O'} + m\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_{O'}) \\ &= m\mathbf{v}_{O'} + m(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_{O'}) = m\mathbf{v}_B, \end{aligned}$$

<sup>11</sup>L'insieme  $C$  viene definito in un riferimento solidale al corpo, in modo che le coordinate di  $C$  non cambino col tempo.

MOMENTO ANGOLARE RISPETTO A  $Q \in \mathbb{E}^3$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_Q &= \int_C \rho(\mathbf{x}')(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}; \mathbf{x}') - \mathbf{x}_Q) \times \mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \\ &= \int_C \rho(\mathbf{x}')(\mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}' - \mathbf{x}_Q) \times (\mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}') d\mathbf{x}', \end{aligned} \quad (6.43)$$

ENERGIA CINETICA

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_C \rho(\mathbf{x}') |\mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}')|^2 d\mathbf{x}' = \frac{1}{2} \int_C \rho(\mathbf{x}') |\mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}'|^2 d\mathbf{x}' = \\ &= \frac{1}{2} m |\mathbf{v}_{O'}|^2 + \int_C \rho(\mathbf{x}') \mathbf{v}_{O'} \cdot \boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}' d\mathbf{x}' + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot I_{O'} \boldsymbol{\omega} = \\ &= \frac{1}{2} m |\mathbf{v}_{O'}|^2 + m \mathbf{v}_{O'} \cdot \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_{O'}) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot I_{O'} \boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

**Osservazione 30.** Se  $O' = B$  si ottiene

$$T = \frac{1}{2} m |\mathbf{v}_B|^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot I_B \boldsymbol{\omega}.$$

Definiamo la matrice di inerzia  $I_Q$  rispetto a un polo  $Q$  tramite la relazione

$$\begin{aligned} I_Q \mathbf{u} &= \int_C \rho(\mathbf{x}')(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}; \mathbf{x}') - \mathbf{x}_Q) \times [\mathbf{u} \times (\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}; \mathbf{x}') - \mathbf{x}_Q)] d\mathbf{x}' \\ &= \int_C \rho(\mathbf{x}')(\mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}' - \mathbf{x}_Q) \times [\mathbf{u} \times (\mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}' - \mathbf{x}_Q)] d\mathbf{x}' \end{aligned} \quad (6.44)$$

per ogni  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ .

**Osservazione 31.** Se  $O' = Q$  la (6.44) assume l'espressione più semplice

$$I_Q \mathbf{u} = \int_C \rho(\mathbf{x}') R\mathbf{x}' \times (\mathbf{u} \times R\mathbf{x}') d\mathbf{x}'$$

e la (6.43) si scrive

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_Q &= \int_C \rho(\mathbf{x}') R\mathbf{x}' \times (\mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \int_C \rho(\mathbf{x}') R\mathbf{x}' d\mathbf{x}' \times \mathbf{v}_Q + I_Q \boldsymbol{\omega} = \\ &= m(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times \mathbf{v}_Q + I_Q \boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

Le componenti  $I_{ij}$  della matrice di inerzia  $I_{O'}$  in una base solidale  $\{\hat{\mathbf{e}}'_1, \hat{\mathbf{e}}'_2, \hat{\mathbf{e}}'_3\}$  si scrivono

$$I_{ij} = \int_C \rho(\mathbf{x}') (\mathbf{e}_i \times \mathbf{x}') \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{x}') d\mathbf{x}',$$

infatti

$$\begin{aligned} I_{ij} &= \int_C \rho(\mathbf{x}')(\mathbf{e}'_i \times R\mathbf{x}') \cdot (\mathbf{e}'_j \times R\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \int_C \rho(\mathbf{x}')(R\mathbf{e}_i \times R\mathbf{x}') \cdot (R\mathbf{e}_j \times R\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \\ &= \int_C \rho(\mathbf{x}') R^T R (\mathbf{e}_i \times \mathbf{x}') \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{x}') d\mathbf{x}'. \end{aligned}$$

**Esercizio 25.** *Mostrare che vale il teorema di scomposizione di  $\mathbf{M}_Q$  anche nel caso di corpi rigidi continui.*

Considerando la densità di forza  $\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}')$  possiamo introdurre le rimanenti quantità dinamiche:

RISULTANTE DELLE FORZE

$$\mathbf{R} = \int_C \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}') d\mathbf{x}',$$

MOMENTO RISULTANTE DELLE FORZE RISPETTO A  $Q \in \mathbb{E}^3$

$$\mathbf{N}_Q = \int_C (\chi(\mathbf{q}; \mathbf{x}') - \mathbf{x}_Q) \times \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}') d\mathbf{x}'.$$

**Osservazione 32.** *Se  $O' = Q$  si ottiene l'espressione più semplice*

$$\mathbf{N}_Q = \int_C R\mathbf{x}' \times \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}') d\mathbf{x}'.$$

**Esempio 10.** *(forza di gravità) Con una scelta opportuna del riferimento abbiamo*

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}') = -\rho(\mathbf{x}')g\mathbf{e}_3,$$

per cui la risultante è

$$\mathbf{R} = \int_C \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}') d\mathbf{x}' = -mg\mathbf{e}_3,$$

e il momento risultante rispetto ad un polo  $Q$  è

$$\mathbf{N}_Q = \int_C R\mathbf{x}' \times [-\rho(\mathbf{x}')g\mathbf{e}_3] d\mathbf{x}' = R \int_C \rho(\mathbf{x}')\mathbf{x}' d\mathbf{x}' \times (-g\mathbf{e}_3) = (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times (-mg\mathbf{e}_3),$$

in cui abbiamo usato la relazione (6.42) con  $O' = Q$ .

**Esempio 11.** *(forza centrifuga) Se  $\boldsymbol{\omega}$  è la velocità angolare abbiamo*

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}') = -\rho(\mathbf{x}')\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}'),$$

per cui, usando (6.42), la risultante è

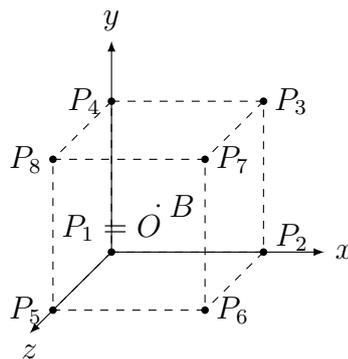
$$\mathbf{R} = \int_C \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}') d\mathbf{x}' = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_{O'})),$$

ed il momento risultante rispetto ad un polo  $Q$  è (scegliendo  $O' = Q$ )

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_Q &= - \int_C \rho(\mathbf{x}') R\mathbf{x}' \times (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}')) d\mathbf{x}' = \\ &= - \int_C \rho(\mathbf{x}') (\boldsymbol{\omega} \cdot R\mathbf{x}') R\mathbf{x}' \times \boldsymbol{\omega} d\mathbf{x}'. \end{aligned}$$

## 6.7 Esercizi

**Esercizio 26.** Si fissi un sistema di riferimento  $Oxyz$  e si consideri un corpo rigido  $\mathcal{C}$  formato da 8 punti materiali  $P_1, \dots, P_8$  di massa  $m$  posti ai vertici di un cubo di lato  $\ell$ . Il punto  $P_1$  del corpo si trova nell'origine  $O$  e i tre spigoli del cubo contenenti  $P_1$  giacciono sugli assi  $Ox, Oy, Oz$  (vedi figura).



- i) Sia  $B$  il baricentro del corpo rigido. Calcolare il momento di inerzia di  $\mathcal{C}$  rispetto all'asse passante per  $O$  e  $B$ .
- ii) Consideriamo il vettore  $\hat{\mathbf{e}}$ , di coordinate  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , con  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ,  $|\hat{\mathbf{e}}| = 1$ . Calcolare il momento di inerzia di  $\mathcal{C}$  rispetto all'asse passante per  $O$  e parallelo ad  $\hat{\mathbf{e}}$ .

**Esercizio 27.** Calcolare i momenti principali rispetto al baricentro per i seguenti corpi rigidi onogenei:

1. disco e anello di raggio  $R$
2. asta di lunghezza  $\ell$
3. sfera piena e vuota di raggio  $R$
4. lamina rettangolare di lati  $a, b$
5. cilindro con raggio di base  $R$  e altezza  $h$
6. cono con raggio di base  $R$  e semiapertura  $\alpha$

ASTA OMOGENEA DI LUNGHEZZA  $\ell$  E MASSA  $m$ ;

Sia  $B$  il baricentro dell'asta. Consideriamo un sistema di riferimento solidale all'asta, centrato in  $O$  e con l'asta lungo l'asse  $Oe_1$ . Allora la matrice di inerzia  $I_B$ , relativa al polo  $B$  si scrive

$$I_B^{asta} = \frac{m\ell^2}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

DISCO ED ANELLO OMOGENEI DI RAGGIO  $R$  E DI MASSA  $m$ ;

$$I_B^{disco} = \frac{mR^2}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad I_B^{anello} = mR^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

SFERA PIENA E VUOTA, OMOGENEE, DI RAGGIO  $R$  E DI MASSA  $m$ ;

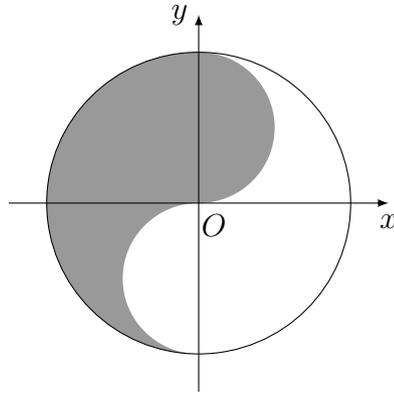
$$I_B^{sp} = \frac{2mR^2}{5} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad I_B^{sv} = \frac{2mR^2}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

CILINDRO PIENO E VUOTO, OMOGENEI, DI RAGGIO  $R$ , DI ALTEZZA  $h$  E DI MASSA  $m$ ;

$$I_B^{cp} = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{2} + \frac{mh^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{2} + \frac{mh^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & mR^2 \end{bmatrix};$$

$$I_B^{cv} = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{bmatrix};$$

**Esercizio 28.** Calcolare i momenti principali di inerzia rispetto al polo  $O$  del disco non omogeneo di raggio  $2R$  rappresentato in figura. La parte scura del disco ha densità  $2\mu$ , mentre la parte chiara ha densità  $\mu$ , con  $\mu$  costante positiva. Le curve che separano le due parti sono semicirconferenze di raggio  $R$ .





# Capitolo 7

## Sistemi vincolati

Introduciamo le diverse classificazioni dei vincoli e presentiamo il problema dello studio del moto vincolato in cui, oltre al moto, appaiono come incognite anche le forze di reazione dei vincoli.

### 7.1 Vincoli e reazioni vincolari

Da un punto di vista matematico, i **vincoli** sono una restrizione dell'insieme delle posizioni e velocità dei punti del sistema. Queste restrizioni si ottengono imponendo delle relazioni (equazioni o disequazioni) che possono coinvolgere le coordinate delle posizioni dei punti, quelle delle loro velocità ed il tempo. Se in tali relazioni appaiono delle disequazioni, che non si possono ridurre ad equazioni<sup>1</sup>, allora i vincoli si dicono **unilaterali**. Altrimenti si dicono **bilaterali**. Nel seguito tratteremo esclusivamente il caso dei vincoli bilaterali. Inoltre, i vincoli si dicono **fissi** se nelle relazioni che li definiscono non appare esplicitamente il tempo  $t$ . Se invece il tempo vi appare tali vincoli si dicono **mobili**.

Con il termine 'vincoli' indicheremo anche i mezzi materiali con cui vengono attuate queste restrizioni alle posizioni e velocità.

Esempi elementari di sistemi meccanici con vincoli bilaterali che si incontrano comunemente sono i seguenti: 1) un punto materiale vincolato ad una curva o una superficie, 2) un insieme di punti materiali che mantengono invariata la loro distanza mutua (cioè un corpo rigido), 3) un corpo rigido che rotola senza strisciare su una superficie.

Consideriamo un sistema di  $N$  punti materiali di masse  $m_1, \dots, m_N$  soggetto a vincoli bilaterali. Tipicamente questi vincoli sono definiti da un'equazione

---

<sup>1</sup>ad esempio il sistema  $f(\mathbf{x}) \geq 0, f(\mathbf{x}) \leq 0$  è definito da disequazioni, ma si riduce a  $f(\mathbf{x}) = 0$ , quindi è bilaterale.

vettoriale della forma

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) + B(\mathbf{x}, t)\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (7.1)$$

dove  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$ ,  $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N)$  denotano le coordinate delle posizioni e delle velocità dei punti,  $\mathbf{a}$  è un vettore di  $\mathbb{R}^k$  e  $B$  una matrice di dimensioni  $k \times 3N$ , entrambi con coefficienti che sono funzioni di  $(\mathbf{x}, t)$  di classe  $C^2$ . Osserviamo che in (7.1) la dipendenza dalle velocità è lineare.

Affinchè queste equazioni siano soddisfatte si assume che i vincoli esercitino delle forze  $\Phi_j$  sui punti del sistema, che si chiamano **reazioni vincolari**.

Anche in presenza di vincoli assumiamo che valgano le equazioni di Newton, che in questo caso si scrivono nella forma

$$m_j \ddot{\mathbf{x}}_j(t) = \mathbf{F}_j(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) + \Phi_j(t), \quad j = 1 \dots N.$$

Le reazioni vincolari  $\Phi_j$  si aggiungono alle forze attive  $\mathbf{F}_j$ , ma sono di natura diversa, in quanto le  $\mathbf{F}_j$  sono funzioni note dello stato cinetico dei punti del sistema mentre le  $\Phi_j$  sono incognite da determinarsi insieme al moto del sistema. Quindi, risolvere un problema di moto vincolato significa trovare il moto  $t \mapsto \mathbf{x}(t)$  e le reazioni vincolari  $\Phi_j(t)$ . Vedremo che per risolvere tale problema è necessario aggiungere delle ipotesi sulle reazioni vincolari.

### 7.1.1 Coppie cinematiche

Altri esempi di vincoli sono dati dalle **coppie cinematiche**. Se due corpi rigidi sono vincolati in modo tale che una superficie  $\sigma_1$  solidale al primo resti sempre a contatto con una superficie  $\sigma_2$  solidale al secondo, allora si dice che i due corpi (o le due superfici) formano una coppia cinematica. I tipi principali di coppie cinematiche sono i seguenti:

1. **coppia prismatica:**  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  sono superfici cilindriche uguali, non di rotazione, per cui è possibile solo un moto traslatorio di un corpo rispetto all'altro lungo una direzione, che è quella delle generatrici del cilindro;
2. **coppia rotoidale:**  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  sono superfici di rotazione uguali e coassiali, per cui è possibile solo un moto rotatorio di un corpo rispetto all'altro. L'asse comune alle due superfici si dice **asse della coppia**. Esse formano una cerniera cilindrica, che può essere fissa oppure mobile;
3. **coppia elicoidale:**  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  sono superfici elicoidali uguali e coassiali. L'asse comune alle due superfici si dice asse della coppia. In questo caso in corrispondenza ad un moto traslatorio si ha anche un moto rotatorio ad esso correlato: si ha una traslazione di  $p$  (detto **passo dell'elica**) in direzione dell'asse della coppia quando  $\sigma_2$  ruota di  $2\pi$  rispetto a  $\sigma_1$ .

4. **coppia rototraslatoria:**  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  sono superfici di rotazione, cilindriche, uguali e coassiali, con sezione circolare. L'asse della coppia corrisponde all'asse comune dei due cilindri. È possibile che i due corpi svolgano, l'uno rispetto all'altro, sia un moto traslatorio lungo la direzione dell'asse della coppia che un moto rotatorio attorno allo stesso asse;
5. **coppia sferica:**  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  sono sfere concentriche uguali, o porzioni di esse. Il centro delle due sfere si chiama **centro della coppia**.

### 7.1.2 Studio del moto vincolato

Mostriamo alcuni esempi elementari che illustrano i problemi che si incontrano nello studio del moto vincolato.

#### Punto materiale su una curva

Come primo esempio consideriamo il caso di un punto materiale vincolato a muoversi su una curva regolare  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definita su un intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$ , con derivata seconda diversa da zero in  $I$ . Introduciamo la **base di Frénet**, che è una base naturale sulla quale si possono proiettare le equazioni di Newton. Assumiamo che la curva  $\gamma$  sia parametrizzata per lunghezza d'arco  $s$ . Indicando con  $'$  la derivata rispetto al parametro  $s$  si ha

$$\int_0^s |\gamma'(\sigma)| d\sigma = s,$$

o anche

$$|\gamma'(s)| = 1,$$

per ogni valore di  $s$  scelto nell'intervallo di definizione di  $\gamma$ . Allora si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \gamma(s(t)), \\ \dot{\mathbf{x}}(t) &= \dot{s}(t)\gamma'(s(t)), \\ \ddot{\mathbf{x}}(t) &= \dot{s}^2(t)\gamma''(s(t)) + \ddot{s}(t)\gamma'(s(t)). \end{aligned} \quad (7.2)$$

Consideriamo la base (mobile) di  $\mathbb{R}^3$ , detta **base di Frénet**, costituita dai vettori

$$\mathbf{e}_t(s) = \gamma'(s), \quad \mathbf{e}_n(s) = \frac{\gamma''(s)}{|\gamma''(s)|}, \quad \mathbf{e}_b(s) = \mathbf{e}_t(s) \times \mathbf{e}_n(s)$$

che si chiamano rispettivamente vettore **tangente**, **normale** e **binormale**.

Poiché  $s$  è il parametro arco si ha

$$\mathbf{e}_t(s) \cdot \mathbf{e}_t(s) = 1, \quad \forall s. \quad (7.3)$$

Derivando la relazione (7.3) rispetto ad  $s$  si ottiene

$$\mathbf{e}_t(s) \cdot \mathbf{e}_n(s) = 0.$$

La funzione  $\kappa(s) = |\gamma''(s)|$  si chiama **curvatura** della curva  $\gamma$ . Con questa notazione si ha

$$\ddot{\mathbf{x}} = \dot{s}^2 \kappa(s) \mathbf{e}_n(s) + \ddot{s} \mathbf{e}_t(s).$$

Supponiamo che il punto sia soggetto ad una forza  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$  e alla reazione vincolare  $\Phi$  che costringe il punto a restare sulla curva  $\gamma$ . L'equazione di Newton si scrive

$$m\ddot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) + \Phi(t), \quad (7.4)$$

dove le incognite sono il moto  $t \mapsto \mathbf{x}(t)$  e la reazione vincolare  $\Phi$  che dipende da esso. Se sostituiamo le formule (7.2) nell'equazione (7.4) e proiettiamo questa equazione sulla base di Frénet si ottiene

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= F_t(s, \dot{s}, t) + \Phi_t, \\ m\dot{s}^2 \kappa(s) &= F_n(s, \dot{s}, t) + \Phi_n, \\ 0 &= F_b(s, \dot{s}, t) + \Phi_b, \end{aligned} \quad (7.5)$$

dove  $F_t, F_n, F_b, \Phi_t, \Phi_n, \Phi_b$  sono le componenti della forza  $\mathbf{F}$  e della reazione vincolare  $\Phi$  lungo i vettori di questa base.

Già nel semplice esempio di un punto materiale vincolato ad una curva regolare si vede che, per determinare il moto  $s(t)$  e la reazione vincolare  $\Phi(t)$ , è necessario fare delle ipotesi aggiuntive. Un'ipotesi comune è assumere che la reazione vincolare sia ortogonale alla curva (vincolo *liscio*, o *privo di attrito*). Questa ipotesi si scrive in modo naturale nella base di Frénet:

$$\Phi_t = \Phi \cdot \mathbf{e}_t = 0.$$

In questo caso la prima equazione in (7.5) si scrive

$$m\ddot{s} = F_t(s, \dot{s}, t).$$

Poiché questa equazione non contiene reazioni vincolari, da essa si può determinare il moto  $t \mapsto s(t)$ . Sostituendo  $s(t), \dot{s}(t)$  nelle altre due equazioni in (7.5) si ottengono le componenti  $\Phi_n, \Phi_b$  della reazione vincolare ortogonali al vincolo in funzione del tempo  $t$ :

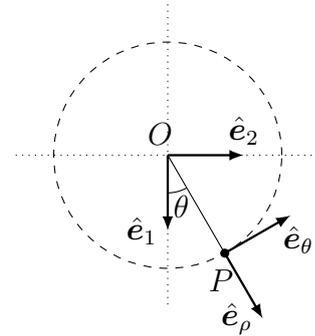
$$\Phi_n = -F_n(s, \dot{s}, t) + m\dot{s}^2 \kappa(s), \quad \Phi_b = -F_b(s, \dot{s}, t).$$

**Esercizio 29.** *Determinare il moto e la reazione vincolare per una particella di massa  $m$  vincolata a muoversi su una circonferenza di raggio  $R$  scabra, assumendo che valga la legge di Coulomb-Morin*

$$\Phi_t = -\frac{\dot{s}}{|\dot{s}|} \sqrt{\Phi_n^2 + \Phi_b^2}.$$

### Il pendolo

Si fissi un riferimento  $O\hat{e}_1\hat{e}_2$ , con l'asse  $O\hat{e}_1$  verticale discendente. Consideriamo un pendolo, costituito da un punto materiale  $P$  di massa  $m$  fissato ad un estremo di una sbarretta di lunghezza  $\ell$  e massa trascurabile. Il punto è quindi vincolato a muoversi su una circonferenza di centro  $O$  e raggio  $\ell$ . Assumiamo che il sistema sia soggetto alla forza di gravità, di accelerazione  $g$ . Assumiamo inoltre che la reazione vincolare  $\Phi$  sia diretta lungo la sbarretta, e quindi ortogonale alla circonferenza (vedi figura).



L'equazione di Newton si scrive

$$m\ddot{\mathbf{x}} = mg\mathbf{e}_1 + \Phi\mathbf{e}_\rho, \quad (7.6)$$

in cui, detto  $\theta$  l'angolo tra il pendolo e la direzione verticale,

$$\mathbf{e}_\rho = \cos\theta\mathbf{e}_1 + \sin\theta\mathbf{e}_2$$

individua la direzione della reazione vincolare e  $\Phi$  è la componente incognita della reazione lungo tale direzione. Sia inoltre

$$\mathbf{e}_\theta = -\sin\theta\mathbf{e}_1 + \cos\theta\mathbf{e}_2.$$

Derivando la relazione  $\mathbf{x} = \ell\mathbf{e}_\rho$  rispetto al tempo e osservando che  $\dot{\mathbf{e}}_\rho = \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$ ,  $\dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta}\mathbf{e}_\rho$  si ottiene

$$\dot{\mathbf{x}} = -\ell\dot{\theta}^2\mathbf{e}_\rho + \ell\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta. \quad (7.7)$$

Sostituendo le relazioni (7.7) e

$$\mathbf{e}_1 = \cos\theta\mathbf{e}_\rho - \sin\theta\mathbf{e}_\theta$$

nell'equazione (7.6) e proiettando lungo  $\mathbf{e}_\rho$  ed  $\mathbf{e}_\theta$  si ottiene

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0, \quad (7.8)$$

$$\dot{\theta}^2 + \frac{g}{\ell}\cos\theta + \frac{\Phi}{m\ell} = 0. \quad (7.9)$$

La (7.8) è l'equazione del moto del pendolo e corrisponde all'equazione del moto unidimensionale

$$\ddot{\theta} = -V'(\theta), \quad V(\theta) = -\frac{g}{\ell}\cos\theta.$$

Infine, dalla relazione (7.9) si può ricavare la reazione vincolare.

Concludiamo la discussione di questo esempio mostrando il ritratto di fase:

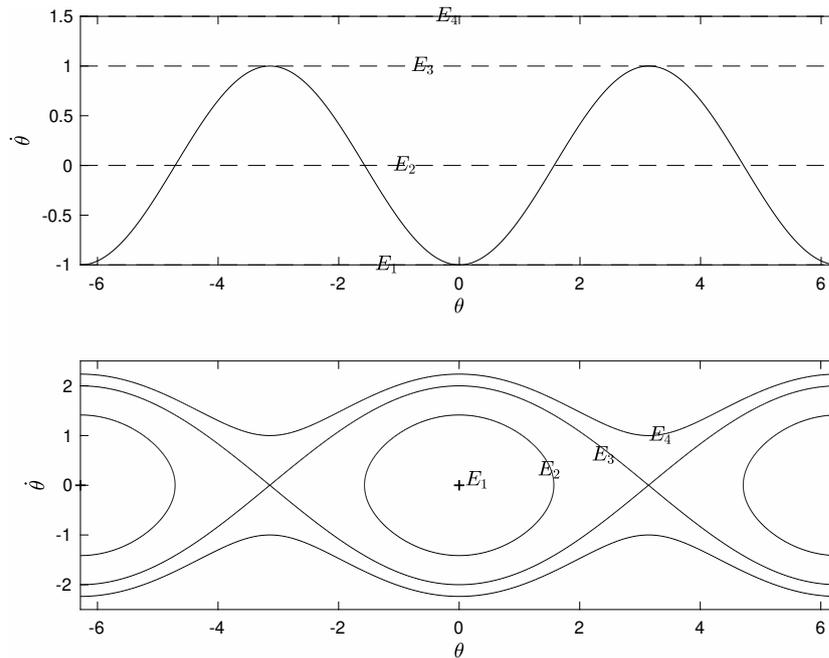


Figura 7.1: Sopra: grafico dell'energia potenziale  $V(\theta)$  del pendolo. Sotto: curve di livello dell'energia totale  $E(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + V(\theta)$ .

## 7.2 Varietà e spazi tangenti

Per comprendere meglio i vincoli da un punto di vista geometrico richiamiamo le seguenti nozioni.

Sia  $\Psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  una mappa differenziabile, con  $1 \leq k < m$ . Ricordiamo che

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \Psi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

è una sottovarietà differenziabile di  $\mathbb{R}^m$  di dimensione  $n = m - k$  se

$$\text{rank} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = k, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{C}.$$

Nell'intorno di ogni punto di  $\mathcal{C}$  possiamo introdurre un sistema di coordinate locali  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$  tramite delle mappe, dette parametrizzazioni locali, della forma

$$\mathbb{R}^n \supseteq U \ni \mathbf{q} \mapsto \chi(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^m, \quad (7.10)$$

dove  $U$  è un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e

$$\text{rank} \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}) = n, \quad \forall \mathbf{q} \in U. \quad (7.11)$$

**Definizione 19.** *Dati una sottovarietà  $\mathcal{C}$  di  $\mathbb{R}^m$  di dimensione  $n$  ed  $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$ , diciamo che il vettore  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$  è **tangente** a  $\mathcal{C}$  in  $\mathbf{x}$  se esistono  $\epsilon > 0$  ed una curva differenziabile*

$$\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{C}$$

tale che

$$\gamma(0) = \mathbf{x}, \quad \gamma'(0) = \mathbf{v}.$$

Denotiamo con  $T_{\mathbf{x}}\mathcal{C}$  l'insieme dei vettori tangenti a  $\mathcal{C}$  in  $\mathbf{x}$ .

**Proposizione 53.** *Per ogni  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{C}$ , l'insieme  $T_{\mathbf{x}_0}\mathcal{C}$  è uno spazio vettoriale di dimensione  $n$ .*

*Dimostrazione.* Data una parametrizzazione locale  $\mathbf{q} \mapsto \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q})$  di  $\mathcal{C}$  in un intorno di  $\mathbf{x}_0 = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}_0)$ , con  $\mathbf{q}_0 \in \mathbb{R}^n$ , i vettori

$$\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_1}(\mathbf{q}_0), \dots, \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_n}(\mathbf{q}_0) \quad (7.12)$$

formano una base di  $T_{\mathbf{x}_0}\mathcal{C}$ . Infatti, considerate le curve

$$\gamma_i(s) = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}_0 + s\mathbf{e}_i), \quad i = 1, \dots, n$$

si ha

$$\gamma_i(0) = \mathbf{x}_0, \quad \gamma_i'(0) = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_i}(\mathbf{q}_0)\mathbf{e}_i = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_i}(\mathbf{q}_0),$$

quindi i vettori (7.12) appartengono all'insieme  $T_{\mathbf{x}_0}\mathcal{C}$ . Inoltre essi sono linearmente indipendenti per la proprietà (7.11). Infine tutti i vettori di  $T_{\mathbf{x}_0}\mathcal{C}$  si possono scrivere come combinazione lineare dei vettori (7.12), infatti ogni curva regolare  $s \mapsto \gamma(s) \in \mathcal{C}$  tale che  $\gamma(0) = \mathbf{x}_0$  si può scrivere in un intorno di  $s = 0$  come

$$\gamma(s) = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}(s)),$$

attraverso una curva  $s \mapsto \mathbf{q}(s)$  che rappresenta  $\gamma$  nelle coordinate  $\mathbf{q}$ , quindi

$$\gamma'(0) = \sum_{h=1}^n \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}(\mathbf{q}_0)q_h'(0). \quad (7.13)$$

□

**Definizione 20.** *Per ogni  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{C}$ , l'insieme  $T_{\mathbf{x}_0}\mathcal{C}$  si chiama **spazio tangente** a  $\mathcal{C}$  in  $\mathbf{x}_0$ .*

I coefficienti  $q'_1(0), \dots, q'_n(0)$  della combinazione lineare (7.13) dei vettori  $\frac{\partial \chi}{\partial q_h}$  sono coordinate naturali sullo spazio tangente  $T_{x_0}\mathcal{C}$ , poiché (7.12) è una scelta naturale per una base di  $T_{x_0}\mathcal{C}$ . Indicheremo brevemente con  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$  questi coefficienti. Poniamo  $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ . Data una parametrizzazione locale  $\mathbf{q} \mapsto \chi(\mathbf{q})$  di  $\mathcal{C}$ , per ogni scelta di  $\mathbf{q}$  ogni vettore  $\mathbf{v}$  tangente a  $\mathcal{C}$  in  $\chi(\mathbf{q})$  si può dunque scrivere in modo unico come

$$\mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{h=1}^n \frac{\partial \chi}{\partial q_h}(\mathbf{q}) \dot{q}_h. \quad (7.14)$$

**Definizione 21.** Chiamiamo **fibrato tangente** alla varietà  $\mathcal{C}$  l'insieme

$$T\mathcal{C} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m : \mathbf{x} \in \mathcal{C}, \mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}}\mathcal{C}\}.$$

**Proposizione 54.** Il fibrato tangente  $T\mathcal{C}$  è una sottovarietà di  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$  di dimensione  $2n$ .

*Dimostrazione.* Se  $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$ , allora i vettori  $\mathbf{v}$  tangenti a  $\mathcal{C}$  in  $\mathbf{x}$  soddisfano la relazione

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})\mathbf{v} = \mathbf{0},$$

perché sono ortogonali a tutti i vettori  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial \mathbf{x}}$ , dove  $\Psi_j$  sono le componenti di  $\Psi$ . Consideriamo la mappa

$$\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \ni (\mathbf{x}, \mathbf{v}) \xrightarrow{\tilde{\Psi}} \left( \Psi(\mathbf{x}), \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})\mathbf{v} \right),$$

con matrice jacobiana

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial (\mathbf{x}, \mathbf{v})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v} \right) & \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix}.$$

Osserviamo che

$$\text{rank} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial (\mathbf{x}, \mathbf{v})}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = 2k$$

per ogni  $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in T\mathcal{C}$ . □

Una scelta naturale per descrivere il fibrato tangente è usare parametrizzazioni locali della forma

$$U \times \mathbb{R}^n \ni (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mapsto \left( \chi(\mathbf{q}), \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \right) \in T\mathcal{C}, \quad (7.15)$$

dove  $U$  è un aperto di  $\mathbb{R}^n$ .

### 7.3 Vincoli olonomi, fissi e mobili

Consideriamo un sistema di  $N$  punti materiali le cui posizioni  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$  sono vincolate in ogni istante  $t$  ad appartenere all'insieme

$$\mathcal{C}_t = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3N} : \Psi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}\}, \quad (7.16)$$

dove

$$\Psi : \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad 1 \leq k < 3N,$$

e si ha

$$\text{rank} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) = k, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{C}_t, \forall t \in \mathbb{R}. \quad (7.17)$$

Quindi per ogni tempo  $t$ , l'insieme delle configurazioni  $\mathcal{C}_t$  è una sottovarietà di  $\mathbb{R}^{3N}$  di dimensione  $n = 3N - k$ , che si chiama **varietà delle configurazioni** al tempo  $t$ .

**Definizione 22.** *Il numero di gradi di libertà del sistema è la dimensione della varietà  $\mathcal{C}_t$ .*

**Osservazione 33.** *Il numero di gradi di libertà di un sistema meccanico corrisponde quindi al numero minimo di parametri scalari necessari per individuare, ad ogni istante, la configurazione del sistema.*

Se la mappa  $\Psi$  non dipende dal tempo i vincoli sono fissi e scriveremo semplicemente  $\mathcal{C}$  per la varietà delle configurazioni.

Nel caso di vincoli mobili, per ogni  $t \in \mathbb{R}$  fissato, consideriamo le mappe

$$U \ni \mathbf{q} \mapsto \chi(\mathbf{q}, t) \in \mathcal{C}_t,$$

che definiscono parametrizzazioni locali della varietà delle configurazioni  $\mathcal{C}_t$ . Le componenti  $q_1, \dots, q_n$  del vettore  $\mathbf{q}$  si chiamano **coordinate lagrangiane**. I possibili vettori velocità dei punti del sistema al tempo  $t$  si scrivono nella forma

$$\mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{h=1}^n \frac{\partial \chi}{\partial q_h}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_h + \frac{\partial \chi}{\partial t}(\mathbf{q}, t), \quad (7.18)$$

al variare di  $\mathbf{q}, t$  e delle componenti  $\dot{q}_h$  del vettore  $\dot{\mathbf{q}}$ , che si chiamano **velocità lagrangiane**. Infatti, se  $t \mapsto \mathbf{q}(t)$  è una curva in  $\mathbb{R}^n$  che rappresenta un moto  $t \mapsto \mathbf{x}(t) = \chi(\mathbf{q}(t), t) \in \mathcal{C}_t$ , derivando rispetto al tempo si ottiene

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{h=1}^n \frac{\partial \chi}{\partial q_h}(\mathbf{q}(t), t) \dot{q}_h(t) + \frac{\partial \chi}{\partial t}(\mathbf{q}(t), t).$$

Al variare dei coefficienti  $\dot{q}_h$  l'espressione

$$\mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{h=1}^n \frac{\partial \chi}{\partial q_h}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_h \quad (7.19)$$

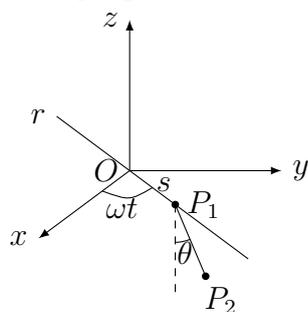
descrive tutti i vettori tangenti alla varietà  $\mathcal{C}_t$ : questi vettori si dicono anche **velocità virtuali**.

Nel caso di vincoli fissi le velocità virtuali coincidono con quelle possibili, cioè

$$\mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

mentre, nel caso di vincoli mobili, queste due velocità sono genericamente distinte.

**Esercizio 30.** Fissato un riferimento  $Oxyz$ , con asse  $Oz$  verticale ascendente, consideriamo il sistema meccanico formato da due punti  $P_1, P_2$  vincolati a mantenere invariata la loro distanza. Il punto  $P_1$  può scivolare su una retta  $r$  passante per  $O$ , che ruota nel piano  $Oxy$  con velocità angolare costante  $\omega$ . Il punto  $P_2$  può muoversi su un piano verticale passante per la retta  $r$ . Scrivere la rappresentazione implicita dell'insieme delle configurazioni e mostrare che a ogni istante  $t$  questo è una varietà di dimensione 2, che indichiamo con  $\mathcal{C}_t$ . Usando come parametri l'ascissa  $s$  di  $P_1$  lungo  $r$  e l'angolo  $\theta$  che  $P_2 - P_1$  forma con la direzione verticale scrivere la parametrizzazione  $\chi(s, \theta, t)$ , in questo caso globale, di  $\mathcal{C}_t$ . Scrivere anche l'espressione di tutte le velocità possibili dei punti  $P_1, P_2$ .



**Definizione 23.** Diciamo che il vincolo è **olonomo**<sup>2</sup> se ad ogni istante  $t$  l'insieme delle configurazioni del sistema corrisponde<sup>3</sup> ad una varietà differenziabile

<sup>2</sup>Questo termine è stato introdotto da Heinrich Rudolf Hertz e deriva dal greco ὅλος (= tutto, intero) e νόμος (= legge), e si riferisce alla possibilità di scrivere una legge che coinvolga solo posizioni e tempo per l'equazione dei vincoli.

<sup>3</sup>la corrispondenza deve essere data da un **diffeomorfismo**, cioè da una mappa bigettiva, differenziabile, con inversa differenziabile.

$\mathcal{C}_t$  e l'insieme delle velocità virtuali, quando il sistema si trova in una qualunque configurazione  $\mathbf{x} \in \mathcal{C}_t$ , è costituito da tutti i vettori dello spazio tangente  $T_{\mathbf{x}}\mathcal{C}_t$ .

Abbiamo sicuramente un vincolo olonomo se gli insiemi  $\mathcal{C}_t$  delle configurazioni al variare di  $t$  sono della forma (7.16) e vale (7.17). Infatti in questo caso gli insiemi  $\mathcal{C}_t$  sono sottovarietà di  $\mathbb{R}^{3N}$  e ammettono delle parametrizzazioni locali  $\mathbf{q} \mapsto \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t)$ , a ogni tempo  $t$ . Le velocità virtuali sono vettori della forma  $\mathbf{v} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, t)\dot{\mathbf{q}}$  e sono tutte accessibili. Dato  $\mathbf{x}_0 = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}_0, t)$  al tempo  $t$  e scelto  $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^{3N}$  qualunque, possiamo trovare un unico vettore  $\dot{\mathbf{q}}_0$  che ci fornisce  $\mathbf{v}_0 = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0, t)\dot{\mathbf{q}}_0$ .

La relazione (7.16), che lega tra loro soltanto le posizioni e il tempo, implica una relazione che coinvolge anche le velocità possibili, che ha la forma (7.1), cioè

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) + B(\mathbf{x}, t)\mathbf{v} = \mathbf{0},$$

con

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad B = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}}. \quad (7.20)$$

Questo si vede prendendo una generica curva  $\mathbf{x}(t)$  tale che  $\Psi(\mathbf{x}(t), t) = 0$  e derivando rispetto al tempo l'ultima relazione.

Viceversa, possiamo avere un vincolo olonomo anche quando le equazioni del vincolo sono della forma (7.1), purché queste relazioni siano conseguenza di una relazione che lega le sole posizioni e il tempo, cioè esista  $\Psi(\mathbf{x}, t)$  che soddisfa (7.20). In questo caso si dice che il vincolo è **integrabile**. Come esempio di vincolo integrabile consideriamo il seguente.

**Esempio 12.** *Disco verticale di raggio  $R$  che rotola senza strisciare su una guida rettilinea orizzontale.* Assumiamo inizialmente che il disco possa anche strisciare mantenendosi sempre a contatto con la guida rettilinea. Per definire la configurazione del disco in questo caso possiamo usare l'ascissa  $s$  del suo baricentro lungo la guida e l'angolo  $\theta$  che un raggio del disco forma con una direzione fissa, per esempio quella verticale. Imponiamo adesso la condizione di puro rotolamento: questa si scrive

$$\dot{s} + R\dot{\theta} = 0. \quad (7.21)$$

Integrando l'equazione (7.21) tra un tempo iniziale  $t_0$  e un tempo generico  $t$  si ottiene

$$(s - s_0) + R(\theta - \theta_0) = 0,$$

in cui  $s_0, \theta_0$  sono i valori iniziali di  $s, \theta$ . Si ottiene quindi un'equazione del vincolo della forma

$$\Psi(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0) = 0, \quad \mathbf{x} = (s, \theta),$$

che dipende dalla configurazione iniziale di riferimento  $\mathbf{x}_0 = (s_0, \theta_0)$ .

## Vincoli anolonomi

Se l'equazione del vincolo è della forma (7.1), ma non esiste una funzione  $\Psi$  che soddisfa le equazioni (7.20), allora il vincolo si dice anolonomo. I sistemi anolonomi che si considerano di solito hanno tutti un insieme delle configurazioni che è una varietà, però non tutti i vettori tangenti a questa varietà sono accessibili a causa del vincolo.

**Esercizio 31.** *Mostrare che il sistema meccanico formato da un disco che si mantiene verticale e che può rotolare senza strisciare su un piano orizzontale senza mai staccarsi da esso è soggetto ad un vincolo anolonomo.*

**Esercizio 32.** *Fissato un riferimento  $Oxyz$ , consideriamo il sistema meccanico formato da due punti  $P_1, P_2$  vincolati a muoversi sulla superficie di una sfera di raggio  $R$  mantenendo tra loro una distanza costante  $\ell$ , con  $0 < \ell < 2R$ . Mostrare che il vincolo è olonomo con varietà delle configurazioni di dimensione 3.*

# Capitolo 8

## Statica dei sistemi meccanici

Introduciamo gli spostamenti virtuali ed il lavoro virtuale fatto dalle forze in corrispondenza di tali spostamenti. Studiamo poi la Statica dei sistemi composti da punti materiali e corpi rigidi, eventualmente soggetti ad altri vincoli olonomi e fissi, tramite il principio dei lavori virtuali e le equazioni cardinali della Statica.

### 8.1 Spostamenti virtuali

Consideriamo un sistema di  $N$  punti materiali  $P_1, \dots, P_N$  soggetti a vincoli olonomi. Sia  $\mathbf{q} \mapsto \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t)$  una parametrizzazione locale della varietà delle configurazioni al tempo  $t$ .

**Definizione 24.** *Uno spostamento virtuale*

$$\delta\boldsymbol{\chi} = (\delta\chi_1, \dots, \delta\chi_N)^T, \quad (8.1)$$

dove

$$\delta\chi_j = \delta\chi_j(\mathbf{q}, t) = \frac{\partial\chi_j}{\partial\mathbf{q}}(\mathbf{q}, t)\delta\mathbf{q} \quad (8.2)$$

è una variazione infinitesima delle coordinate dei punti  $P_j$ , che li sposta da una configurazione ammissibile qualunque ad un'altra infinitamente vicina e relativa allo stesso istante, cioè ottenuta ignorando la dipendenza dal tempo in  $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t)$ , come se il vincolo fosse fisso.

**Osservazione 34.** Con il simbolo  $\delta\mathbf{q}$  si intende il differenziale  $d\mathbf{q}$  delle variabili indipendenti  $\mathbf{q}$ . Gli spostamenti virtuali sono movimenti sugli spazi tangenti alla varietà delle configurazioni. Se i vincoli sono fissi gli spostamenti virtuali corrispondono ai differenziali

$$d\boldsymbol{\chi} = (d\chi_1, \dots, d\chi_N), \quad \text{con } d\chi_j = \frac{\partial\chi_j}{\partial\mathbf{q}}(\mathbf{q})d\mathbf{q}.$$

In generale ci si riferisce alle formule (8.1), (8.2) parlando di **differenziali virtuali**.

Mostriamo alcune formule per gli spostamenti virtuali nei casi di vincoli incontrati in precedenza.

**1) corpo rigido:** in assenza di altri vincoli, oltre alle forze interne che assicurano la rigidità del corpo, gli spostamenti virtuali dei punti  $P_j$  quando essi si trovano in una configurazione  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$  sono dati da

$$\delta\boldsymbol{\chi}_j = d\mathbf{x}_{O'} + \boldsymbol{\omega} dt \times (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{O'}), \quad (8.3)$$

dove  $\mathbf{x}_{O'} \in \mathbb{R}^3$  sono le coordinate di un punto  $O'$  solidale al corpo. In questa formula le variabili indipendenti sono lo spostamento infinitesimo  $d\mathbf{x}_{O'}$  e la rotazione infinitesima  $\boldsymbol{\omega} dt$ .

La (8.3) segue direttamente dalla formula fondamentale della cinematica rigida

$$\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{O'})$$

e dal fatto che il vincolo di rigidità è fisso.

Nella (8.3) possiamo anche scrivere  $\boldsymbol{\chi}_j$  al posto di  $\mathbf{x}_j$ , per sottolineare il fatto che le posizioni dei punti  $P_j$  non sono indipendenti, ma dipendono tutte dalle coordinate  $\mathbf{x}_{O'}$  e dal vettore degli angoli di Eulero  $\boldsymbol{\alpha} = (\varphi, \theta, \psi)$  tramite le relazioni

$$\boldsymbol{\chi}_j = \mathbf{x}_{O'} + R(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{x}'_j,$$

vedi la prima relazione in (6.25).

In presenza di altri vincoli oltre a quelli di rigidità, gli spostamenti virtuali dei  $P_j$  si scrivono tramite una formula simile alla (8.3), cioè:

$$\delta\boldsymbol{\chi}_j = \delta\boldsymbol{\chi}_{O'} + \boldsymbol{\omega} dt \times (\boldsymbol{\chi}_j - \boldsymbol{\chi}_{O'}), \quad (8.4)$$

dove, detta  $\mathbf{q} \mapsto \boldsymbol{\chi}_{O'}(\mathbf{q}, t)$  la mappa che fornisce le coordinate di  $O'$  al tempo  $t$  in funzione delle coordinate locali  $\mathbf{q}$ , si intende che

$$\delta\boldsymbol{\chi}_{O'} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_{O'}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, t) \delta \mathbf{q}.$$

Infatti il vettore  $(\mathbf{x}_{O'}, \boldsymbol{\alpha})$ , che caratterizza le posizioni dei punti del corpo, si può scrivere come funzione di coordinate locali  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^d, 1 \leq d \leq 6$ , ed eventualmente del tempo:

$$\mathbf{x}_{O'} = \boldsymbol{\chi}_{O'}(\mathbf{q}, t), \quad \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q}).$$

Usando la prima relazione in (6.25), il vettore delle coordinate di ogni punto  $P_j$  del corpo si scrive

$$\boldsymbol{\chi}_j = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}_j, t) = \boldsymbol{\chi}_{O'}(\mathbf{q}, t) + R(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q}))\mathbf{x}'_j.$$

Per lo spostamento virtuale di  $P_j$  si ottiene quindi

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{\chi}_j &= \delta\boldsymbol{\chi}_{O'} + \left( \frac{\partial R}{\partial \varphi} \delta\varphi + \frac{\partial R}{\partial \theta} \delta\theta + \frac{\partial R}{\partial \psi} \delta\psi \right) R^T R \boldsymbol{x}'_j \\ &= \delta\boldsymbol{\chi}_{O'} + \left( \frac{\partial R}{\partial \varphi} \dot{\varphi} dt + \frac{\partial R}{\partial \theta} \dot{\theta} dt + \frac{\partial R}{\partial \psi} \dot{\psi} dt \right) R^T (\boldsymbol{\chi}_j - \boldsymbol{\chi}_{O'}) \\ &= \delta\boldsymbol{\chi}_{O'} + \dot{R} R^T dt (\boldsymbol{\chi}_j - \boldsymbol{\chi}_{O'}) = \delta\boldsymbol{\chi}_{O'} + \boldsymbol{\omega} dt \times (\boldsymbol{\chi}_j - \boldsymbol{\chi}_{O'}),\end{aligned}$$

dove abbiamo usato le relazioni

$$\delta\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} = \dot{\varphi} dt, \quad \delta\theta = \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} = \dot{\theta} dt, \quad \delta\psi = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} = \dot{\psi} dt$$

ed il fatto che la matrice antisimmetrica  $\boldsymbol{\Omega} = \dot{R} R^T$  corrisponde alla velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$  del corpo rigido attraverso la formula

$$\boldsymbol{\Omega} \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3.$$

**2) puro rotolamento:** se  $P_1, P_2$  sono i punti in cui due corpi rigidi si toccano senza strisciare ( $P_1 = P_2$ ) e  $\boldsymbol{\chi}_1, \boldsymbol{\chi}_2$  sono le loro coordinate si ha

$$\delta\boldsymbol{\chi}_1 = \delta\boldsymbol{\chi}_2.$$

**3) coppie cinematiche:** le superfici  $\sigma_1, \sigma_2$ , che delimitano i corpi della coppia cinematica, strisciano l'una sull'altra: un punto  $P_1 \in \sigma_1$  può staccarsi da un punto  $P_2 \in \sigma_2$ , con cui è a contatto, solo muovendosi in una direzione del piano  $\Pi$  tangente a  $\sigma_1$  (e a  $\sigma_2$ ) in  $P_1$ . Dette  $\boldsymbol{\chi}_1, \boldsymbol{\chi}_2$  le coordinate di  $P_1, P_2$  si ha

$$\delta\boldsymbol{\chi}_1 = \delta\boldsymbol{\chi}_2 + \delta\boldsymbol{\pi},$$

dove  $\delta\boldsymbol{\pi}$  è uno spostamento infinitesimo sul piano  $\Pi$ .

## 8.2 Il lavoro virtuale

Fissato un sistema di riferimento, siano  $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_N$  le forze attive, supposte indipendenti dal tempo, che agiscono sui punti  $P_1, \dots, P_N$  di un sistema meccanico soggetto a vincoli olonomi, che possono essere sia fissi che mobili. Siano inoltre

$$\mathbf{q} \mapsto \boldsymbol{\chi}_j(\mathbf{q}, t), \quad (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mapsto \mathbf{v}_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

le mappe che forniscono ad ogni istante le coordinate delle posizioni e delle velocità virtuali dei punti  $P_j$  in termini delle coordinate e velocità lagrangiane  $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$  e del

tempo  $t$ , vedi (7.19). Chiamiamo **lavoro virtuale** (elementare) delle forze  $\mathbf{F}_j$  in corrispondenza agli spostamenti virtuali  $\delta\boldsymbol{\chi}_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , la quantità

$$\delta\mathcal{L} = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{v}) \cdot \delta\boldsymbol{\chi}_j.$$

dove  $\boldsymbol{\chi} = (\boldsymbol{\chi}_1, \dots, \boldsymbol{\chi}_N)$  e  $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N)$  sono i vettori di tutte le posizioni e velocità virtuali.

**Esempio 13.** Consideriamo il lavoro virtuale delle reazioni vincolari che assicurano la rigidità di un corpo rigido discreto. Usando la (8.4) si ottiene

$$\delta\mathcal{L} = \mathbf{R}^{(v)} \cdot \delta\boldsymbol{\chi}_{O'} + \mathbf{N}_{O'}^{(v)} \cdot \boldsymbol{\omega} dt,$$

dove  $\mathbf{R}^{(v)}$ ,  $\mathbf{N}_{O'}^{(v)}$  sono la risultante e il momento risultante delle reazioni vincolari rispetto ad un polo  $O'$ , solidale al corpo. Poiché queste reazioni sono le forze interne del sistema di punti che costituiscono il corpo, esse formano un sistema equilibrato ed il loro lavoro virtuale è nullo in corrispondenza ad un qualunque spostamento virtuale rigido.

**Osservazione 35.** In generale, per uno spostamento virtuale non rigido, il lavoro elementare delle forze interne non è nullo, anche se il sistema delle forze interne è equilibrato. Come esempio basta prendere un sistema composto da due punti materiali  $P_1, P_2$  di masse  $m_1, m_2$  che si muovono su una retta e sono collegati da una molla di costante elastica  $k > 0$ . In questo caso il sistema di forze è equilibrato perché, indicando con  $x_1, x_2$  le coordinate di  $P_1, P_2$  sulla retta, abbiamo una coppia di forze di intensità  $k|x_1 - x_2|$  e braccio nullo. Il lavoro elementare è invece

$$\delta\mathcal{L} = -k(x_1 - x_2)dx_1 - k(x_2 - x_1)dx_2 = -k(x_1 - x_2)(dx_1 - dx_2),$$

che è diverso da zero per la maggior parte degli spostamenti virtuali  $dx_1, dx_2$ .

**Proposizione 55.** *Il lavoro virtuale delle forze interne di un sistema meccanico, anche non rigido, non dipende dal sistema di riferimento scelto.*

*Dimostrazione.* Osserviamo che la relazione tra le velocità dei punti  $P_j$  del sistema in due riferimenti  $\Sigma, \Sigma'$  è data da

$$\mathbf{v}_j = \mathbf{v}'_j + \mathbf{v}_j^T, \quad \mathbf{v}_j^T = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{O'}).$$

Il lavoro virtuale delle forze interne in  $\Sigma$  differisce da quello in  $\Sigma'$  per il termine dovuto alle velocità di trascinamento  $\mathbf{v}_j^T$ , che è

$$\delta\mathcal{L}^T = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j^{(I)} \cdot (\delta\boldsymbol{\chi}_{O'} + \boldsymbol{\omega} dt \times (\boldsymbol{\chi}_j - \boldsymbol{\chi}_{O'})) = \mathbf{R}^{(I)} \cdot \delta\boldsymbol{\chi}_{O'} + \mathbf{N}_{O'}^{(I)} \cdot \boldsymbol{\omega} dt = 0,$$

dove abbiamo usato il fatto che il sistema delle forze interne è equilibrato.  $\square$

**Esempio 14.** *Nel caso del sistema dell'Osservazione 35, calcolando il lavoro elementare delle forze interne in un riferimento avente il punto  $P_1$  come origine, si ottiene lo stesso risultato.*

### 8.2.1 Vincoli senza attrito

Consideriamo un sistema meccanico soggetto a vincoli olonomi bilaterali, eventualmente mobili, e privi di attrito. In questo caso il lavoro virtuale delle reazioni vincolari  $\Phi_j$  che agiscono sui punti  $P_j$  del sistema è nullo ad ogni istante e per ogni spostamento virtuale:<sup>1</sup>

$$\delta\mathcal{L}^{(v)} = \sum_{j=1}^N \Phi_j \cdot \delta\chi_j = 0. \quad (8.5)$$

La proprietà (8.5) è una legge sperimentale, la cui validità si può verificare in molti casi già trattati, e si assume valida sempre nelle ipotesi fatte.

Usando la (8.5) per le coppie cinematiche prive di attrito, elenchiamo di seguito le condizioni che devono essere soddisfatte dalla risultante e dal momento risultante delle reazioni vincolari  $\Phi_j$ , che sono forze interne alla coppia. Assumendo che non ci sia attrito tra le superfici  $\sigma_1, \sigma_2$  che delimitano i corpi rigidi che formano la coppia, dalla (8.5) segue che

$$\delta\mathcal{L}^{(v)} = \mathbf{R}^{(v)} \cdot \delta\chi_{O'} + \mathbf{N}_{O'}^{(v)} \cdot \boldsymbol{\omega} dt = 0 \quad (8.6)$$

per ogni scelta del polo  $O' \in \mathbb{E}^3$  e per ogni spostamento virtuale relativo di un elemento della coppia rispetto all'altro, definito da  $\delta\chi_{O'}, \boldsymbol{\omega} dt$ . Nella (8.6)  $\mathbf{R}^{(v)}, \mathbf{N}_{O'}^{(v)}$  sono la risultante e il momento risultante rispetto a  $O'$  delle reazioni vincolari esercitate da un elemento della coppia sull'altro nel loro moto relativo.

**Osservazione 36.** *Nel calcolo del lavoro virtuale qui usiamo la Proposizione 55 scegliendo un riferimento in cui un elemento della coppia è fermo. Il polo  $O'$  deve essere solidale all'elemento della coppia che si muove.*

Trattiamo separatamente i vari casi.

1. **coppia prismatica:** siano  $\mathbf{u}$  il versore di una generatrice della superficie cilindrica  $\sigma_1 (= \sigma_2)$  ed  $s$  la coordinata lagrangiana della coppia lungo la generatrice scelta. Si ha

$$\delta\chi_{O'} = \mathbf{u} \delta s, \quad \boldsymbol{\omega} dt = \mathbf{0}.$$

---

<sup>1</sup>per vincoli unilaterali la condizione da usare è  $\delta\mathcal{L}^{(v)} \geq 0$ , vedi [11].

Dalla (8.6), per l'arbitrarietà di  $\delta s$ , segue che

$$\mathbf{R}^{(v)} \cdot \mathbf{u} = 0.$$

2. **coppia rotoidale:** siano  $\mathbf{u}$  il versore dell'asse di rotazione e  $\theta$  l'angolo di rotazione. Sia inoltre  $O'$  un punto dell'asse della coppia. Si ha

$$\delta\chi_{O'} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\omega} dt = \mathbf{u} \delta\theta.$$

Dalla (8.6), per l'arbitrarietà di  $\delta\theta$ , segue che

$$\mathbf{N}_{O'}^{(v)} \cdot \mathbf{u} = 0.$$

3. **coppia elicoidale:** siano  $\mathbf{u}$  il versore dell'asse di rotazione,  $\theta$  l'angolo di rotazione e  $p > 0$  il passo dell'elica. Si ha

$$\delta\chi_{O'} = \frac{p}{2\pi} \mathbf{u} \delta\theta, \quad \boldsymbol{\omega} dt = \mathbf{u} \delta\theta.$$

Dalla (8.6), per l'arbitrarietà di  $\delta\theta$ , segue che

$$\frac{p}{2\pi} \mathbf{R}^{(v)} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{N}_{O'}^{(v)} \cdot \mathbf{u} = 0.$$

4. **coppia rototraslatoria:** si ha

$$\delta\chi_{O'} = \mathbf{u} \delta s, \quad \boldsymbol{\omega} dt = \mathbf{u} \delta\theta.$$

Dalla (8.6) si ottiene

$$\mathbf{R}^{(v)} \cdot \mathbf{u} \delta s + \mathbf{N}_{O'}^{(v)} \cdot \mathbf{u} \delta\theta = 0,$$

da cui, per l'arbitrarietà di  $\delta s$  e di  $\delta\theta$ , segue che

$$\mathbf{R}^{(v)} \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{N}_{O'}^{(v)} \cdot \mathbf{u} = 0.$$

5. **coppia sferica:** sia  $O'$  il centro della coppia. Si ha

$$\delta\chi_{O'} = \mathbf{0}.$$

Dalla (8.6), per l'arbitrarietà di  $\boldsymbol{\omega} dt$ , segue che

$$\mathbf{N}_{O'}^{(v)} = \mathbf{0}.$$

## 8.2.2 Vincoli di puro rotolamento

Il lavoro virtuale è uguale a zero anche per i vincoli di puro rotolamento, infatti per i punti  $P_1, P_2$  di due corpi a contatto, dette  $\Phi_1, \Phi_2$  le reazioni vincolari sui due corpi in  $P_1, P_2$ , si ha

$$\delta\mathcal{L}^{(v)} = \Phi_1 \cdot \delta\chi_1 + \Phi_2 \cdot \delta\chi_2 = \Phi_1 \cdot (\delta\chi_1 - \delta\chi_2)$$

per il principio di azione e reazione, e in un moto di puro rotolamento si ha  $\delta\chi_1 = \delta\chi_2$ , quindi  $\delta\mathcal{L}^{(v)} = 0$ . Dunque si possono estendere a questo caso i risultati trovati per il caso dei vincoli olonomi fissi e senza attrito, se questi dipendono dall'annullarsi del lavoro virtuale delle reazioni vincolari.

## 8.3 Statica di sistemi di punti materiali vincolati

Consideriamo un sistema di  $N$  punti materiali  $P_1, \dots, P_N$  di masse  $m_1, \dots, m_N$  soggetti a vincoli olonomi fissi e a forze attive indipendenti dal tempo in un riferimento assegnato  $\Sigma$ .

**Definizione 25.** *La configurazione  $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$  si dice di equilibrio se, ponendo i punti  $P_j$  in questa configurazione con velocità tutte nulle, essi vi restano per sempre.*

I problemi fondamentali della Statica sono la ricerca delle configurazioni di equilibrio e il calcolo delle reazioni vincolari in corrispondenza degli equilibri. Nel seguito di questo capitolo introduciamo due metodi diversi per trattare questi problemi.

## 8.4 Il principio dei lavori virtuali

**Principio di lavori virtuali:** *Si consideri un sistema meccanico costituito da  $N$  punti materiali soggetti a vincoli olonomi fissi, che siano anche privi di attrito o di puro rotolamento, e a forze attive  $\mathbf{F}_1^{(a)}, \dots, \mathbf{F}_N^{(a)}$  indipendenti dal tempo. Condizione necessaria e sufficiente perché una configurazione  $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$  di tale sistema sia di equilibrio è che per ogni spostamento virtuale  $\delta\chi = (\delta\chi_1, \dots, \delta\chi_N)$  che allontani la configurazione del sistema da  $\mathbf{x}_0$  si abbia*

$$\delta\mathcal{L}^{(a)} = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j^{(a)}(\chi, \mathbf{0}) \cdot \delta\chi_j = 0. \quad (8.7)$$

**Osservazione 37.** La validità del principio dei lavori virtuali viene assunta come postulato. Inoltre le relazioni che derivano da esso sono **equazioni pure**, cioè non contengono reazioni vincolari.

Inserendo la relazione

$$\delta \boldsymbol{\chi}_j = \sum_{h=1}^n \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h} \delta q_h$$

nella (8.7) si ottiene

$$\delta \mathcal{L}^{(a)} = \sum_{h=1}^n \left( \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j^{(a)}(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{0}) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h} \right) \delta q_h = 0$$

per ogni spostamento infinitesimo  $\delta \mathbf{q} = (\delta q_1, \dots, \delta q_n)$ . Ponendo

$$Q_h = Q_h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j^{(a)}(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{v}) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h}, \quad h = 1, \dots, n, \quad (8.8)$$

e usando l'arbitrarietà dei  $\delta q_h$  si trova la seguente condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio:

$$Q_h(\mathbf{q}, \mathbf{0}) = 0, \quad h = 1, \dots, n. \quad (8.9)$$

Le espressioni  $Q_h$ , definite in (8.8), si chiamano **forze generalizzate** oppure **componenti lagrangiane delle forze**.

Se le forze attive sono conservative, cioè se  $\mathbf{F}_j = \mathbf{F}_j(\mathbf{x})$ , e se esiste una funzione  $\mathcal{V}(\mathbf{x})$  tale che

$$\mathbf{F}_j = -\nabla_{\mathbf{x}_j} \mathcal{V}, \quad j = 1, \dots, N$$

allora, posto

$$V(\mathbf{q}) = \mathcal{V}(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q})),$$

si ha

$$Q_h = Q_h(\mathbf{q}) = - \sum_{j=1}^N \nabla_{\mathbf{x}_j} \mathcal{V}(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q})) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h}(\mathbf{q}) = - \frac{\partial V}{\partial q_h}(\mathbf{q}),$$

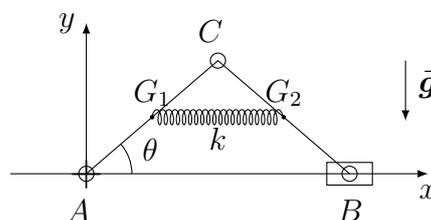
quindi (8.9) si scrive

$$\frac{\partial V}{\partial q_h}(\mathbf{q}) = 0, \quad h = 1, \dots, n.$$

### 8.4.1 Alcuni esempi

**Esempio 15.** Si consideri il sistema meccanico formato da due aste omogenee, di lunghezza  $2\ell$  e massa  $m$ , incernierate in un loro estremo  $C$ .

L'estremo  $A$  della prima asta è collegato all'origine di un riferimento  $Axy$ , con asse  $Ay$  verticale ascendente. L'estremo  $B$  della seconda asta può scivolare senza attrito sull'asse orizzontale  $Ax$ . Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione  $g$ . Inoltre una molla di costante elastica  $k > 0$  e lunghezza a riposo nulla collega i due baricentri  $G_1, G_2$  delle aste. Sia  $\theta$  l'angolo tra l'asta  $AC$  e l'asse  $Ax$ . Assumiamo che tutti i vincoli siano privi di attrito.



Usiamo il principio dei lavori virtuali per trovare le configurazioni di equilibrio. Le forze attive sono conservative, con energia potenziale

$$V(\theta) = 2mgl \sin \theta + 2k\ell^2 \cos^2 \theta.$$

Dall'equazione

$$V'(\theta) = 2mgl \cos \theta \left(1 - 2 \frac{k\ell}{mg} \sin \theta\right) = 0$$

si ottengono le configurazioni di equilibrio

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_2 = -\frac{\pi}{2}$$

e, se  $J = \frac{mg}{2k\ell} < 1$ ,

$$\theta_3 = \arcsin J, \quad \theta_4 = \pi - \arcsin J.$$

Le configurazioni  $\theta_3, \theta_4$  esistono solo se  $J < 1$ . Si dice che  $J = 1$  è un valore di **biforcazione** del parametro  $J$ .

**Osservazione 38.** Nota una configurazione di equilibrio, possiamo usare il principio dei lavori virtuali anche per trovare le reazioni vincolari. Possiamo infatti immaginare di sopprimere il vincolo per cui si vuole calcolare la reazione vincolare e includere tale reazione tra le forze attive, che appaiono nell'espressione del lavoro virtuale (vedi Esempio 16).

## 8.5 Le equazioni cardinali della Statica

Sia dato un sistema di  $N$  punti materiali  $P_j, j = 1 \dots N$  di masse  $m_j$ , soggetti a vincoli olonomi fissi e a forze attive indipendenti dal tempo. Fissato un riferimento  $\Sigma$ , assumiamo che sui punti agiscano delle forze  $\mathbf{F}_j$ , somma vettoriale di forze interne ed esterne:

$$\mathbf{F}_j = \mathbf{F}_j^{(I)} + \mathbf{F}_j^{(E)}.$$

Inoltre sia le forze interne che le forze esterne sono somma vettoriale di forze attive e reazioni vincolari, denotate rispettivamente con  $\mathbf{f}$  e  $\Phi$ :

$$\mathbf{F}_j^{(I)} = \mathbf{f}_j^{(I)} + \Phi_j^{(I)}, \quad \mathbf{F}_j^{(E)} = \mathbf{f}_j^{(E)} + \Phi_j^{(E)}.$$

Nel riferimento  $\Sigma$  le equazioni di Newton per il sistema si scrivono

$$m_j \ddot{\mathbf{x}}_j = \mathbf{f}_j^{(I)} + \Phi_j^{(I)} + \mathbf{f}_j^{(E)} + \Phi_j^{(E)}, \quad j = 1, \dots, N.$$

Condizione necessaria e sufficiente perché il sistema sia in equilibrio è che siano in equilibrio tutte le parti che lo compongono, cioè che

$$\mathbf{F}_j = \mathbf{0}, \quad j = 1, \dots, N$$

quando le velocità dei punti  $P_j$  sono tutte nulle. Ne segue che per la risultante  $\mathbf{R}$  e il momento risultante  $\mathbf{N}_Q$  delle forze  $\mathbf{F}_j$ , calcolato rispetto ad un polo  $Q$  qualunque, valgono le equazioni

$$\mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{N}_Q = \mathbf{0}. \quad (8.10)$$

Poiché la risultante  $\mathbf{R}^{(I)}$  e il momento risultante  $\mathbf{N}_Q^{(I)}$  delle forze interne sono nulli, detti  $\mathbf{R}^{(E)}$ ,  $\mathbf{N}_Q^{(E)}$  le corrispondenti quantità per le forze esterne, dalle (8.10) si ottiene

$$\mathbf{R}^{(E)} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{N}_Q^{(E)} = \mathbf{0}. \quad (8.11)$$

Le relazioni (8.11) si chiamano **equazioni cardinali della Statica**.

Sottolineiamo il fatto che le (8.11) sono in generale condizioni necessarie ma non sufficienti per l'equilibrio. Infatti, se consideriamo il problema dei due corpi (vedi Sezione 3.5) le equazioni (8.11) sono banalmente soddisfatte in quanto il sistema meccanico è isolato, quindi le forze esterne sono nulle, ma il problema non ammette nessuna configurazione di equilibrio.

Se un sistema di  $N$  punti materiali vincolati è in equilibrio sotto l'azione di un dato sistema di forze attive, sostituendo ai vincoli le reazioni vincolari che questi esercitano, il sistema si può considerare costituito da un insieme di punti materiali liberi, ciascuno dei quali è in equilibrio sotto l'azione delle forze attive e vincolari agenti su di esso.

L'equilibrio dei punti del sistema non viene turbato se a due o più forze applicate ad uno stesso punto del sistema si sostituisce la loro risultante, oppure, se la forza agente su un punto del sistema si scompone come somma vettoriale di più forze applicate allo stesso punto. Quindi, per un sistema meccanico discreto in equilibrio possiamo sempre eseguire sulle forze applicate ai singoli punti la prima operazione elementare, introdotta nella Sezione 5.5, senza alterarne l'equilibrio.

Nel caso di un corpo rigido si assume che valga il cosiddetto **postulato caratteristico dei solidi**: l'equilibrio di un corpo rigido non si altera se si applicano due forze direttamente opposte a due punti qualsiasi del corpo. Quindi, nel caso di un corpo rigido in equilibrio possiamo anche eseguire la seconda operazione elementare sulle forze applicate ai singoli punti senza alterarne l'equilibrio.

Possiamo trarre la seguente conclusione.

**Proposizione 56.** *Nel caso di un corpo rigido le equazioni (8.11) sono anche sufficienti per avere un equilibrio.*

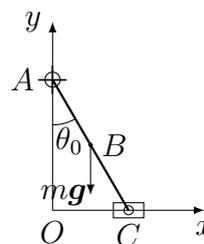
*Dimostrazione.* Assumiamo che valgano le equazioni (8.11), per cui le forze esterne che agiscono sui punti  $P_i$  del corpo formano un sistema equilibrato. Sappiamo già che le forze interne agenti sui  $P_i$  formano un altro sistema equilibrato, per cui anche l'unione dei due sistemi di forze applicate è equilibrato:

$$\mathbf{R} = \mathbf{N}_Q = \mathbf{0}$$

per ogni scelta del polo  $Q \in \mathbb{E}^3$ . Poiché per un corpo rigido abbiamo a disposizione entrambe le operazioni elementari, per la Proposizione 24 possiamo ridurre quest'ultimo sistema di forze (comprendente forze interne ed esterne) ad un sistema nullo. In questo modo ogni punto del corpo rigido risulta soggetto ad una forza nulla, e dunque il corpo è in equilibrio. □

Le equazioni (8.11) sono utili anche per il calcolo delle reazioni vincolari in condizioni di equilibrio.

**Esempio 16.** In un piano verticale si fissi un riferimento  $Oxy$ , con asse  $Oy$  verticale ascendente. Consideriamo un'asta  $AC$  omogenea, di lunghezza  $2\ell$  e massa  $m$ . L'estremo  $A$  dell'asta è incernierato all'asse  $Oy$  nel punto di coordinate  $(0, 2h)$ , con  $0 < h < \ell$ , tramite una cerniera cilindrica fissa. L'estremo  $C$  è vincolato all'asse  $Ox$  tramite una cerniera cilindrica scorrevole sull'asse  $Ox$  (vedi figura). Sull'asta agisce la forza di gravità, di accelerazione  $g$ .



L'asta è chiaramente in equilibrio in quanto i vincoli non le permettono di muoversi. Il valore  $\theta_0$  dell'angolo tra l'asta e la direzione verticale è dato da  $\cos \theta_0 = h/\ell$ . Tutti i vincoli sono supposti privi di attrito e le cerniere hanno massa trascurabile. Calcoliamo le coordinate delle reazioni vincolari  $\Phi_A$ ,  $\Phi_C$  esercitate sull'asta nei punti  $A$ ,  $C$ . Siano  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  le coordinate dei versori degli assi  $Ox, Oy$ . Le reazioni vincolari si scrivono

$$\Phi_A = \alpha \mathbf{e}_1 + \beta \mathbf{e}_2, \quad \Phi_C = \gamma \mathbf{e}_2,$$

con  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  da determinarsi. La prima equazione cardinale della Statica si scrive

$$\Phi_A + \Phi_C - mg\mathbf{e}_2 = \mathbf{0},$$

per cui si ottiene

$$\alpha = 0, \quad \beta + \gamma - mg = 0.$$

La seconda equazione cardinale della Statica, calcolata rispetto al polo  $A$ , si scrive<sup>2</sup>

$$(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A) \times (-mg\mathbf{e}_2) + (\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_A) \times \gamma\mathbf{e}_2 = \mathbf{0}, \quad (8.12)$$

con

$$\mathbf{x}_A = (0, 2h, 0), \quad \mathbf{x}_B = (\ell \sin \theta_0, \ell \cos \theta_0, 0), \quad \mathbf{x}_C = (2\ell \sin \theta_0, 0, 0)$$

le coordinate dei punti  $A, B, C$ .

Dalla (8.12) si ottiene

$$-mg + 2\gamma = 0.$$

Si ha quindi

$$\gamma = \frac{mg}{2}, \quad \beta = mg - \gamma = \frac{mg}{2}$$

e dunque

$$\Phi_A = \Phi_C = \frac{mg}{2}\mathbf{e}_2.$$

Adesso calcoliamo le stesse reazioni vincolari usando il principio dei lavori virtuali. Immaginiamo di eliminare il vincolo in  $C$ , dato dalla cerniera scorrevole in figura, e consideriamo la reazione  $\Phi_C$  come una forza esterna attiva. In questo caso il sistema acquista un grado di libertà. Detto  $\theta$  l'angolo tra l'asta e la direzione verticale, che adesso può variare, le coordinate del punto  $C$  dell'asta sono date da

$$\chi_C = 2\ell \sin \theta \mathbf{e}_1 + 2(h - \ell \cos \theta) \mathbf{e}_2,$$

per cui gli spostamenti virtuali del punto  $C$  dalla configurazione di equilibrio, con  $\theta = \theta_0$ , sono

$$\delta\chi_C = 2\ell \cos \theta_0 \delta\theta \mathbf{e}_1 + 2\ell \sin \theta_0 \delta\theta \mathbf{e}_2.$$

Dalla relazione  $\chi_B - \chi_A = \frac{1}{2}(\chi_C - \chi_A)$  si ottiene anche che

$$\delta\chi_B = \frac{1}{2}\delta\chi_C.$$

Il lavoro virtuale delle forze esterne attive (a cui si è aggiunta la reazione  $\Phi_C$ ) in corrispondenza ad uno spostamento virtuale  $\delta\chi_C$  è dato da

$$\delta\mathcal{L}^{(a)} = \gamma\mathbf{e}_2 \cdot \delta\chi_C - mg\mathbf{e}_2 \cdot \delta\chi_B = \ell \sin \theta_0 (2\gamma - mg) \delta\theta.$$

<sup>2</sup>si estendono questi vettori ad  $\mathbb{R}^3$  aggiungendo una terza coordinata nulla.

Poiché  $\delta\mathcal{L}^{(a)}$  si deve annullare per ogni spostamento virtuale ammissibile, cioè per ogni  $\delta\theta$ , si ottiene

$$\gamma = \frac{mg}{2}.$$

Immaginiamo adesso di eliminare la cerniera cilindrica in  $A$  e consideriamo la reazione  $\Phi_A$  come una forza esterna attiva. In questo caso il sistema acquista due gradi di libertà. Sia  $s$  l'ascissa di  $C$  sull'asse  $Ox$ . Le coordinate dei punti  $A, B, C$  sono date da

$$\chi_A = (s - 2\ell \sin \theta)\mathbf{e}_1 + 2\ell \cos \theta \mathbf{e}_2, \quad \chi_B = (s - \ell \sin \theta)\mathbf{e}_1 + \ell \cos \theta \mathbf{e}_2, \quad \chi_C = s\mathbf{e}_1,$$

per cui gli spostamenti virtuali di questi punti dalla configurazione di equilibrio sono

$$\begin{aligned} \delta\chi_A &= (\delta s - 2\ell \cos \theta_0 \delta\theta)\mathbf{e}_1 - 2\ell \sin \theta_0 \delta\theta \mathbf{e}_2, \\ \delta\chi_B &= (\delta s - \ell \cos \theta_0 \delta\theta)\mathbf{e}_1 - \ell \sin \theta_0 \delta\theta \mathbf{e}_2, \\ \delta\chi_C &= \delta s \mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

Il lavoro virtuale delle forze esterne attive (a cui si è aggiunta la reazione  $\Phi_A$ ) è dato da

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}^{(a)} &= \Phi_A \cdot \delta\chi_A - mg\mathbf{e}_2 \cdot \delta\chi_B + \Phi_C \cdot \delta\chi_C \\ &= \alpha(\delta s - 2\ell \cos \theta_0 \delta\theta) - 2\ell\beta \sin \theta_0 \delta\theta + mg\ell \sin \theta_0 \delta\theta \end{aligned}$$

e si deve annullare in corrispondenza ad ogni spostamento virtuale, cioè per ogni scelta di  $\delta s$  e di  $\delta\theta$ . Se scegliamo  $\delta\theta = 0$ , per l'arbitrarietà di  $\delta s$  si ottiene

$$\alpha = 0.$$

Scegliendo invece  $\delta s = 0$ , per l'arbitrarietà di  $\delta\theta$  si ottiene

$$\beta = \frac{mg}{2}.$$

## 8.6 Problemi isostatici e iperstatici

Consideriamo un'asta con un estremo  $A$  collegato ad un telaio verticale tramite una cerniera cilindrica fissa e con l'altro estremo  $B$  appoggiato ad una superficie liscia, come in Figura 8.1 a sinistra. Sull'asta agisce anche una forza attiva esterna  $\vec{F}$ . Le componenti  $\vec{\Phi}_A, \vec{\Phi}_B$  delle reazioni vincolari agenti sull'asta nei punti  $A$  e  $B$  risultano univocamente determinate. Infatti dalle equazioni cardinali della Statica otteniamo tre equazioni (due dalla prima equazione cardinale ed una dalla seconda) con tre incognite, in quanto è noto *a priori* che  $\vec{\Phi}_B$  ha direzione verticale

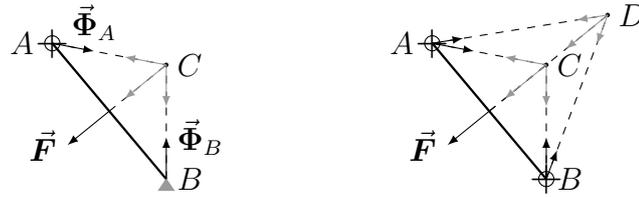


Figura 8.1: Sinistra: problema isostatico. Destra: problema iperstatico.

per l'ipotesi fatta sul vincolo. Nella stessa figura mostriamo la costruzione grafica delle reazioni vincolari: per avere un sistema di forze equilibrato, se la forza  $\vec{F}$  non è diretta come l'asta, le linee di azione di  $\vec{F}$  e quelle di  $\vec{\Phi}_A$ ,  $\vec{\Phi}_B$  si devono incontrare in un punto, che in figura è chiamato  $C$ . In questo caso il problema è detto **isostatico**.

Supponiamo adesso che anche l'estremo  $B$  dell'asta sia vincolato ad un telaio orizzontale tramite una cerniera cilindrica fissa, come in Figura 8.1 a destra. In questo caso le componenti delle reazioni vincolari non sono univocamente determinate, infatti le incognite sono quattro. Nella stessa figura mostriamo due diverse soluzioni grafiche per le reazioni vincolari in  $A$  e  $B$ . In questo caso il problema è detto **iperstatico**.

## 8.7 Sovrapposizione degli effetti e metodo di scomposizione

Osserviamo che le equazioni introdotte per trattare i problemi di Statica dipendono linearmente dalle forze. Possiamo allora utilizzare il **principio di sovrapposizione degli effetti**: se un effetto dipende linearmente dalle cause che lo producono, allora tale effetto è dato dalla somma degli effetti che ciascuna causa produrrebbe se agisse da sola.

Come abbiamo già osservato, se un sistema meccanico è composto da più parti ed è in equilibrio, allora ciascuna delle sue parti deve soddisfare le condizioni per l'equilibrio. Questo fatto conduce a un procedimento detto **metodo di scomposizione** di un sistema meccanico.

Mostriamo con un esempio come queste due osservazioni possono essere utilizzate per calcolare le reazioni vincolari di un sistema meccanico.

**Esempio 17. (arco a tre cerniere)** Si consideri il sistema formato da due aste rigide  $AC$ ,  $BC$  collegate nel loro estremo comune  $C$  da una cerniera cilindrica mobile. Gli altri estremi  $A$  e  $B$  delle due aste sono fissati ad un telaio rettilineo

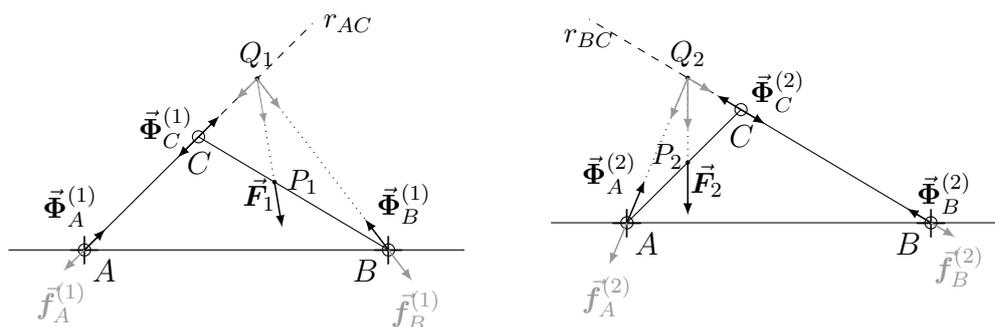


Figura 8.2: Reazioni vincolari in  $A, B$  nell'ipotesi che una delle due aste sia scarica.

orizzontale attraverso due cerniere cilindriche fisse. Nel punto  $P_1$  dell'asta  $BC$  è applicata una forza  $\vec{F}_1$  e nel punto  $P_2$  dell'asta  $AC$  è applicata una forza  $\vec{F}_2$ . Tutti i vincoli sono supposti privi di attrito. Mostriamo come si calcolano le reazioni vincolari esercitate dalle cerniere in  $A$  e  $B$  sulle due aste.

Assumiamo dapprima che l'asta  $AC$  sia **scarica**, cioè che su di essa non agiscano forze attive esterne. In questa ipotesi chiamiamo  $\vec{\Phi}_A^{(1)}$  e  $\vec{\Phi}_C^{(1)}$  le reazioni vincolari esercitate dalle cerniere in  $A$  e  $C$  sull'asta  $AC$ , e chiamiamo  $\vec{\Phi}_B^{(1)}$  la reazione della cerniera in  $B$  sull'asta  $BC$ . Poiché il sistema composto dalla sola asta  $AC$  è in equilibrio, le reazioni  $\vec{\Phi}_A^{(1)}$  e  $\vec{\Phi}_C^{(1)}$  devono essere direttamente opposte e dirette lungo la retta  $r_{AC}$  per  $A, C$ .

Osserviamo che, per il principio di azione e reazione e poiché il sistema è in equilibrio, la cerniera in  $C$  esercita sull'asta  $BC$  una reazione vincolare opposta a quella che la stessa cerniera esercita su  $AC$ .

Anche il sistema costituito dalla sola asta  $BC$  è in equilibrio e su di essa agiscono le reazioni vincolari  $\vec{\Phi}_B^{(1)}, -\vec{\Phi}_C^{(1)}$  e la forza  $\vec{F}_1$  applicata nel punto  $P_1$ . Scomponiamo tale forza nel sistema equivalente  $\{(\vec{f}_A^{(1)}, A), (\vec{f}_B^{(1)}, B)\}$ , con una componente lungo  $r_{AC}$  e l'altra applicata in  $B$ , vedi Figura 8.2 a sinistra<sup>3</sup>. Per avere l'equilibrio si ottiene quindi che

$$\vec{\Phi}_A^{(1)} = -\vec{f}_A^{(1)}, \quad \vec{\Phi}_B^{(1)} = -\vec{f}_B^{(1)}.$$

Assumiamo adesso che l'asta  $BC$  sia scarica e chiamiamo  $\vec{\Phi}_B^{(2)}$  e  $\vec{\Phi}_C^{(2)}$  le reazioni vincolari esercitate dalle cerniere in  $B$  e  $C$  sull'asta  $BC$ , e  $\vec{\Phi}_A^{(2)}$  la reazione della cerniera in  $A$  su  $AC$ .

In modo analogo a prima otteniamo che le reazioni  $\vec{\Phi}_B^{(2)}$  e  $\vec{\Phi}_C^{(2)}$  devono essere direttamente opposte e dirette lungo la retta  $r_{BC}$  per  $B, C$ . L'asta  $AC$  deve pure stare in equilibrio sotto l'azione delle reazioni  $\vec{\Phi}_A^{(2)}, -\vec{\Phi}_C^{(2)}$  e della forza  $\vec{F}_2$  applicata

<sup>3</sup>la figura è disegnata nel caso in cui  $\vec{F}_1$  non sia parallela alla retta  $r_{AC}$ , comunque anche nel caso  $\vec{F}_1 \parallel r_{AC}$  si può scomporre  $(\vec{F}_1, P_1)$  in un sistema equivalente con le stesse caratteristiche (*dimostrarlo!*)

in  $P_2$ . Decomponiamo tale forza nel sistema equivalente  $\{(\mathbf{f}_A^{(2)}, A), (\mathbf{f}_B^{(2)}, B)\}$ , con una componente lungo  $r_{BC}$  e l'altra applicata in  $A$ , vedi Figura 8.2 a destra. All'equilibrio si ottiene quindi

$$\vec{\Phi}_A^{(2)} = -\mathbf{f}_A^{(2)}, \quad \vec{\Phi}_B^{(2)} = -\mathbf{f}_B^{(2)}.$$

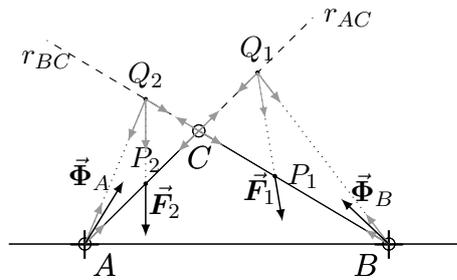


Figura 8.3: Reazioni vincolari esercitate sulle due aste dalle cerniere in  $A$ ,  $B$  in presenza delle forze  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ .

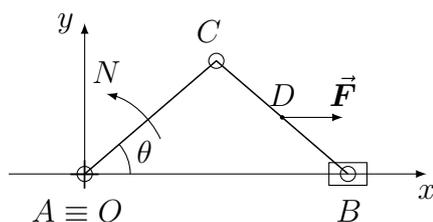
Usando il principio di sovrapposizione degli effetti, per determinare le reazioni vincolari  $\vec{\Phi}_A$  e  $\vec{\Phi}_B$  esercitate dalle cerniere in  $A$  e  $B$  sulle aste  $AC$  e  $BC$  rispettivamente, in presenza di entrambe le forze attive  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  applicate in  $P_1$ ,  $P_2$ , basta fare la somma vettoriale delle reazioni vincolari esercitate in  $A$  e  $B$  nei due casi precedenti, vedi Figura 8.3. Concludiamo quindi che

$$\vec{\Phi}_A = \vec{\Phi}_A^{(1)} + \vec{\Phi}_A^{(2)}, \quad \vec{\Phi}_B = \vec{\Phi}_B^{(1)} + \vec{\Phi}_B^{(2)}.$$

## 8.8 Esercizi

**Esercizio 33.** *In un piano orizzontale si fissi un riferimento  $Oxy$ . In tale piano si consideri il sistema meccanico formato da due aste, di uguale lunghezza  $2\ell$ , incerniate in un loro estremo  $C$ . L'estremo  $A$  della prima asta è incerniato nell'origine  $O$ . L'estremo  $B$  della seconda asta può scivolare sull'asse  $Ox$ . Siano  $\hat{e}_1, \hat{e}_2$  i versori degli assi  $Ox, Oy$ . Nel punto medio dell'asta  $BC$  agisce una forza costante  $\vec{F} = F\hat{e}_1$ , con  $F > 0$ . Sull'asta  $AC$  agisce una coppia di forze di momento  $\vec{N} = N\hat{e}_1 \times \hat{e}_2$ , con  $N > 0$ . Assumiamo che tutti i vincoli siano privi di attrito. Usando come coordinate l'angolo  $\theta$  che l'asta  $AC$  forma con l'asse  $Ox$ ,*

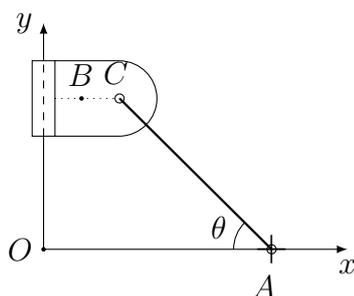
1. *determinare le configurazioni di equilibrio con il principio dei lavori virtuali;*
2. *ritrovare le configurazioni di equilibrio con le equazioni cardinali della Statica e calcolare le reazioni vincolari nei punti  $A, B, C$ .*



**Esercizio 34.** In un piano verticale si fissi un riferimento  $Oxy$  con asse  $Oy$  verticale ascendente. In tale piano si consideri il sistema meccanico formato da un'asta omogenea  $AC$ , di massa  $m$  e lunghezza  $2\ell$ . L'estremo  $A$  dell'asta è incernierato nel punto dell'asse  $Ox$  di coordinate  $(\frac{3\sqrt{2}}{2}\ell, 0)$ . L'altro estremo  $C$  è incernierato in un punto di un corpo rigido  $\mathcal{D}$  di massa  $M$  e baricentro  $B$ . Il corpo  $\mathcal{D}$  è anche collegato all'asse  $Oy$  attraverso una coppia prismatica. Le coordinate dei punti  $B, C$  sono

$$B \equiv \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\ell, \sqrt{2}\ell\right), \quad C \equiv \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ell, \sqrt{2}\ell\right).$$

Sui due corpi agisce la forza di gravità di accelerazione  $g$  e tutti i vincoli sono supposti privi di attrito.



1. Calcolare l'angolo  $\theta$  che l'asta  $AC$  forma con la direzione orizzontale.
2. Usando il principio di sovrapposizione degli effetti ed il metodo di scomposizione determinare le componenti delle reazioni vincolari in  $A$  e in  $C$  esercitate rispettivamente dall'asse  $Ox$  e dal corpo  $\mathcal{D}$  sugli estremi dell'asta.



# Capitolo 9

## Le equazioni cardinali della Dinamica

Studiamo la dinamica di sistemi composti da punti materiali e corpi rigidi, eventualmente soggetti ad altri vincoli. Lo studio è svolto utilizzando le equazioni cardinali. Trattiamo inoltre le equazioni di Eulero per il moto di un corpo rigido con un punto fisso  $O$  e la descrizione del moto dovuta a Poinot nel caso in cui il momento delle forze esterne rispetto ad  $O$  sia nullo (moti per inerzia).

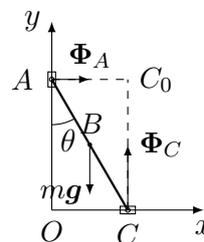
### 9.1 Equazioni cardinali e moti rigidi

Richiamiamo le due equazioni cardinali della Dinamica per un sistema di  $N$  punti materiali (5.8):

$$\begin{cases} m\mathbf{a}_B &= \mathbf{R}^{(E)} \\ \dot{\mathbf{M}}_Q &= -m\mathbf{v}_Q \times \mathbf{v}_B + \mathbf{N}_Q^{(E)} \end{cases} \quad (9.1)$$

Possiamo usare le equazioni (9.1) per determinare il moto di un corpo rigido, anche soggetto ad altri vincoli. Consideriamo un esempio semplice e scriviamo le equazioni del moto in diversi modi.

**Esempio 18.** In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento  $\Sigma = Oxyz$ , con asse  $Oy$  verticale ascendente. Studiamo il moto di un'asta omogenea di estremi  $A, C$ , di lunghezza  $2\ell$  e massa  $m$ , che scivola mantenendo gli estremi sui due assi  $Ox, Oy$ . Assumiamo che il sistema sia soggetto alla forza di gravità, di accelerazione  $g$ , e che gli assi sviluppino le reazioni vincolari  $\Phi_A \mathbf{e}_1, \Phi_C \mathbf{e}_2$  sugli estremi dell'asta. Le componenti  $\Phi_A, \Phi_C$  sono incognite. Usiamo come coordinata l'angolo  $\theta$  che l'asta forma con la direzione verticale.



La velocità angolare dell'asta è  $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{e}_3$ . Siamo interessati a scrivere delle equazioni che abbiano una forma semplice e che siano equazioni pure, cioè non contengano reazioni vincolari. Scriviamo la seconda equazione cardinale per l'asta facendo tre scelte diverse per il polo  $Q$ .

i)  $Q = O$ , l'origine del riferimento:

$$\dot{\mathbf{M}}_O = -m\mathbf{v}_O \times \mathbf{v}_B + \mathbf{N}_O = \mathbf{N}_O, \quad (9.2)$$

ii)  $Q = B$ , il baricentro dell'asta:

$$\dot{\mathbf{M}}_B = -m\mathbf{v}_B \times \mathbf{v}_B + \mathbf{N}_B = \mathbf{N}_B, \quad (9.3)$$

iii)  $Q = C_0$ , il centro istantaneo di rotazione:<sup>1</sup>

$$\dot{\mathbf{M}}_{C_0} = -m\mathbf{v}_{C_0} \times \mathbf{v}_B + \mathbf{N}_{C_0} = \mathbf{N}_{C_0}. \quad (9.5)$$

La iii) è l'unica equazione pura, infatti

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_O &= \mathbf{x}_A \times \Phi_A \mathbf{e}_1 + \mathbf{x}_C \times \Phi_C \mathbf{e}_2 - \mathbf{x}_B \times mg\mathbf{e}_2 = \\ &= (-2\Phi_A \cos \theta + 2\Phi_C \sin \theta - mg \sin \theta)\ell\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{N}_B &= (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B) \times \Phi_A \mathbf{e}_1 + (\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_B) \times \Phi_C \mathbf{e}_2 = \\ &= \ell(\sin \theta \mathbf{e}_1 - \cos \theta \mathbf{e}_2) \times (-\Phi_A \mathbf{e}_1 + \Phi_C \mathbf{e}_2) = \\ &= (\Phi_C \sin \theta - \Phi_A \cos \theta)\ell\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{N}_{C_0} &= (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_{C_0}) \times (-mg\mathbf{e}_2) = \mathbf{x}_B \times mg\mathbf{e}_2 = \\ &= mg\ell \sin \theta \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Al variare di  $\theta$  il centro istantaneo di rotazione  $C_0$  è un punto sempre diverso in un riferimento solidale al corpo, oltre che nel riferimento  $\Sigma$ . Le coordinate di  $C_0$  in  $\Sigma$  sono

$$\mathbf{x}_{C_0} = 2\ell(\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2),$$

quindi il termine  $-m\mathbf{v}_{C_0} \times \mathbf{v}_B$  è nullo perchè

$$\mathbf{v}_{C_0} = 2\dot{\theta}\ell(\cos \theta \mathbf{e}_1 - \sin \theta \mathbf{e}_2) \quad (9.4)$$

è parallelo a  $\mathbf{v}_B$ . Quando usiamo la formula fondamentale (6.19) con il centro istantaneo di rotazione  $C_0$  abbiamo  $\mathbf{v}_{C_0} = \mathbf{0}$ , perchè stiamo considerando la velocità di un punto solidale al corpo, cioè stiamo calcolando il limite del rapporto incrementale in cui appaiono le coordinate dello stesso punto del corpo a due tempi diversi, quindi non possiamo usare la (9.4). Nell'Esempio 18 la confusione tra le due velocità non produce effetti sulla forma dell'equazione, ma non è sempre così. Questa difficoltà nasce dalla notazione utilizzata tradizionalmente, che è la stessa per le due velocità.

Quindi l'equazione (9.5) appare la scelta più conveniente. È comunque utile risolvere il problema nei tre modi diversi.

Nel caso i), usando la formula fondamentale (6.19), abbiamo

$$\mathbf{M}_O = m\mathbf{x}_B \times \mathbf{v}_O + I_O\boldsymbol{\omega}. \quad (9.6)$$

Notiamo che, se l'asta si muove,  $\mathbf{v}_O \neq \mathbf{0}$  perché corrisponde alla velocità di  $O$  come punto solidale all'asta. Per calcolarla possiamo usare nuovamente la formula fondamentale:

$$\mathbf{v}_O = \mathbf{v}_B - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_B = 2\ell\dot{\theta}(\cos\theta\mathbf{e}_1 - \sin\theta\mathbf{e}_2) = 2\mathbf{v}_B,$$

per cui

$$m\mathbf{x}_B \times \mathbf{v}_O = 2m\mathbf{x}_B \times \mathbf{v}_B = -2m\ell^2\dot{\theta}\mathbf{e}_3.$$

Inoltre, sapendo che

$$I_3^{(B)} = \frac{m\ell^2}{3}$$

è il momento di inerzia dell'asta rispetto all'asse  $B\hat{\mathbf{e}}_3$  e che  $O\hat{\mathbf{e}}_3$  è un asse principale di inerzia, dal teorema di Huygens-Steiner otteniamo

$$I_O\boldsymbol{\omega} = I_3^{(O)}\boldsymbol{\omega} = (I_3^{(B)} + m\ell^2)\dot{\theta}\mathbf{e}_3 = \frac{4}{3}m\ell^2\dot{\theta}\mathbf{e}_3.$$

Abbiamo dunque

$$\mathbf{M}_O = -2m\ell^2\dot{\theta}\mathbf{e}_3 + \frac{4}{3}m\ell^2\dot{\theta}\mathbf{e}_3 = -\frac{2}{3}m\ell^2\dot{\theta}\mathbf{e}_3.$$

In alternativa si può calcolare il momento angolare  $\mathbf{M}_O$  come segue:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_B + \mathbf{x}_B \times m\mathbf{v}_B = \frac{1}{3}m\ell^2\dot{\theta}\mathbf{e}_3 - m\ell^2\dot{\theta}\mathbf{e}_3 = -\frac{2}{3}m\ell^2\dot{\theta}\mathbf{e}_3.$$

In questo modo sparisce l'ambiguità di notazione, che nasceva dal fatto di calcolare la velocità di un punto solidale al corpo (il punto  $O$ ), ma sempre diverso al variare di  $\theta$ . Dalla (9.2) si ottiene

$$-\frac{2}{3}m\ell^2\ddot{\theta} = (-2\Phi_A \cos\theta + 2\Phi_C \sin\theta - mg \sin\theta)\ell. \quad (9.7)$$

Possiamo eliminare le reazioni vincolari  $\Phi_A, \Phi_C$  dalla (9.7) utilizzando la prima equazione cardinale proiettata lungo  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ :

$$\Phi_A = m\mathbf{a}_B \cdot \mathbf{e}_1 = m\ell(\ddot{\theta} \cos\theta - \dot{\theta}^2 \sin\theta), \quad (9.8)$$

$$\Phi_C - mg = m\mathbf{a}_B \cdot \mathbf{e}_2 = -m\ell(\ddot{\theta} \sin\theta + \dot{\theta}^2 \cos\theta). \quad (9.9)$$

Sostituendo (9.8), (9.9) nella (9.7) otteniamo l'equazione del moto:

$$\ddot{\theta} = \frac{3g}{4\ell} \sin \theta. \quad (9.10)$$

Nel caso ii) abbiamo

$$\mathbf{M}_B = I_B \boldsymbol{\omega} = \frac{m\ell^2}{3} \dot{\theta} \mathbf{e}_3,$$

per cui dalla (9.3) si ottiene l'equazione

$$\frac{m\ell^2}{3} \ddot{\theta} = (\Phi_C \sin \theta - \Phi_A \cos \theta) \ell. \quad (9.11)$$

Sostituendo (9.8), (9.9) nella (9.11) si ottiene l'equazione del moto (9.10).

Nel caso iii) abbiamo

$$\mathbf{M}_{C_0} = \mathbf{M}_B + (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_{C_0}) \times m \mathbf{v}_B = \mathbf{M}_B - \mathbf{x}_B \times m \mathbf{v}_B = \frac{4}{3} m \ell^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_3,$$

e dalla (9.5) si ottiene subito l'equazione (9.10).

**Esercizio 35.** *Si studi il moto di un disco omogeneo di raggio  $R$  e massa  $m$  che rotola senza strisciare su un piano inclinato di un angolo  $\alpha$  rispetto ad un piano orizzontale.*

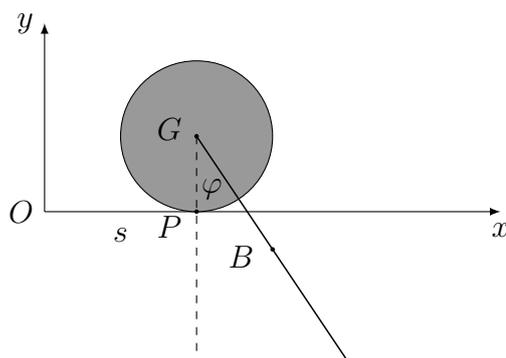
**Esercizio 36.** *Si scrivano le equazioni del moto di un sistema costituito da un disco omogeneo di massa  $M$  e raggio  $R$  e da un'asta omogenea di massa  $m$  e lunghezza  $2\ell$  vincolata per un estremo al baricentro  $G$  del disco. Il moto si svolge nel piano  $(x, y)$  (vedi figura 36), il disco è vincolato a rotolare senza strisciare sull'asse  $x$  mentre l'asta può oscillare liberamente rispetto alla verticale (il vincolo in  $G$  è liscio). Si utilizzino coordinate  $(s, \varphi)$  in cui  $s$  è l'ascissa del punto del disco a contatto con l'asse  $x$  e  $\varphi$  è l'angolo tra l'asta e la verticale.*

### 9.1.1 Equazioni del moto con la conservazione dell'energia

Mostriamo come, per i sistemi ad un grado di libertà, possiamo scrivere le equazioni del moto usando la conservazione dell'energia invece delle equazioni cardinali. Questo modo di procedere alternativo pu permettere di arrivare più facilmente al risultato.

Per un corpo rigido discreto, dal teorema dell'energia cinetica abbiamo

$$\dot{T} = \Pi, \quad (9.12)$$



dove, scegliendo un punto  $O'$  solidale al corpo,

$$\begin{aligned} \Pi &= \sum_{h=1}^N \vec{F}_h \cdot \vec{v}_h = \sum_{h=1}^N \mathbf{F}_h \cdot [\vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times (P_h - O')] \\ &= \vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{v}_{O'} + \vec{\mathbf{N}}_{O'} \cdot \vec{\omega} = \vec{\mathbf{R}}^{(E)} \cdot \vec{v}_{O'} + \vec{\mathbf{N}}_{O'}^{(E)} \cdot \vec{\omega}. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Nel caso di corpi rigidi continui otteniamo lo stesso risultato usando (6.41) e l'ipotesi che la risultante e il momento risultante delle forze interne siano nulli:

$$\Pi = \int_C \mathbf{f}(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \mathbf{R}^{(E)} \cdot \mathbf{v}_{O'} + \mathbf{N}_{O'}^{(E)} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (9.14)$$

Nella scrittura dell'equazione (9.12) si possono quindi usare sistemi di forze equivalenti a quelli dati, sia per i corpi rigidi discreti che per quelli continui.

Se le forze esterne sono conservative allora esse ammettono un'energia potenziale  $V$  e l'energia totale

$$E = T + V$$

è un integrale primo. Ricordiamo che la conservazione di  $E$  segue dalla relazione (9.12) in cui abbiamo  $\Pi = -\dot{V} = -\nabla_{\mathbf{x}} V \cdot \dot{\mathbf{x}}$ .

Possiamo usare la conservazione dell'energia per scrivere le equazioni del moto del sistema dell'Esempio 18. Infatti in questo caso le reazioni vincolari sono forze esterne a potenza nulla, per ogni velocità possibile, quindi le possiamo tralasciare, e la forza di gravità è conservativa, con energia potenziale

$$V = mg\mathbf{x}_B \cdot \mathbf{e}_2 = mg\ell \cos \theta,$$

in cui abbiamo sostituito il sistema delle forze di gravità distribuito sugli elementi materiali che compongono l'asta con un'unica forza  $-mge_2$  applicata al baricentro. Questo è lecito perché, grazie alla relazione (9.14), possiamo usare sistemi di forze equivalenti.

L'energia cinetica si può calcolare col teorema di König:

$$T = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_B|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot I_B\boldsymbol{\omega} = \frac{2}{3}m\ell^2\dot{\theta}^2.$$

Derivando rispetto al tempo l'equazione della conservazione dell'energia si ottiene

$$\left(\frac{4}{3}m\ell^2\ddot{\theta} - mg\ell \sin \theta\right)\dot{\theta} = 0.$$

Da questa si ottengono due equazioni: la prima,  $\dot{\theta} = 0$ , dice semplicemente che l'energia si conserva nelle configurazioni di equilibrio, la seconda ci fornisce l'equazione del moto:

$$\frac{4}{3}m\ell^2\ddot{\theta} - mg\ell \sin \theta = 0.$$

**Esercizio 37.** Usando la conservazione dell'energia, scrivere l'equazione del moto per un disco di raggio  $R$  e massa  $m$  che rotola senza strisciare su un piano inclinato verticale in presenza della forza di gravità, di accelerazione costante  $g$ .

## 9.2 Equazioni di Eulero per il corpo rigido con un punto fisso

Fissiamo un riferimento  $\Sigma = O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$  e scriviamo le equazioni che descrivono il moto di un corpo rigido  $\mathcal{C}$  con un punto fisso  $O$ . La seconda equazione cardinale in questo caso è sufficiente per determinare il moto:

$$\left.\frac{d}{dt}\vec{M}_O\right|_{\Sigma} = \vec{N}_O. \quad (9.15)$$

Sia  $\vec{\omega}$  la velocità angolare del corpo rigido e consideriamo un sistema di riferimento principale  $\Sigma' = O\hat{e}'_1\hat{e}'_2\hat{e}'_3$ , solidale a  $\mathcal{C}$  e centrato nel punto fisso  $O$ . Assumiamo inoltre che  $\Sigma'$  abbia la velocità angolare di minima norma tra quelle di tutti i riferimenti solidali a  $\mathcal{C}$ . Dalla relazione

$$\left.\frac{d}{dt}\vec{M}_O\right|_{\Sigma} = \left.\frac{d}{dt}\vec{M}_O\right|_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times \vec{M}_O$$

si ha

$$\left.\frac{d}{dt}\vec{M}_O\right|_{\Sigma'} = \vec{M}_O \times \vec{\omega} + \vec{N}_O. \quad (9.16)$$

Usando la relazione

$$\vec{M}_O = \mathfrak{I}_O\vec{\omega}$$

otteniamo le **equazioni di Eulero**

$$\left. \frac{d}{dt}(\mathfrak{I}_O \vec{\omega}) \right|_{\Sigma'} = \mathfrak{I}_O \vec{\omega} \times \vec{\omega} + \vec{N}_O. \quad (9.17)$$

Scriviamo la velocità angolare  $\vec{\omega}$ , il momento angolare  $\vec{M}_O$  e il momento della forza  $\vec{N}_O$  nella base  $\mathcal{B}' = \{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\}$ :

$$\vec{\omega} = \sum_{i=1}^3 \omega_i \hat{e}'_i, \quad \vec{M}_O = \sum_{i=1}^3 M_i \hat{e}'_i = \sum_{i=1}^3 I_i \omega_i \hat{e}'_i, \quad \vec{N}_O = \sum_{i=1}^3 N_i \hat{e}'_i.$$

Introduciamo anche i vettori rappresentativi

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T, \quad \mathbf{M}_O = (M_1, M_2, M_3)^T, \quad \mathbf{N}_O = (N_1, N_2, N_3)^T.$$

Le equazioni (9.17), scritte in coordinate in questa base, diventano

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 &= (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 + N_1, \\ I_2 \dot{\omega}_2 &= (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 + N_2, \\ I_3 \dot{\omega}_3 &= (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 + N_3. \end{cases} \quad (9.18)$$

### 9.3 Moto per inerzia

**Definizione 26.** *Chiamiamo moti per inerzia o anche moti di Eulero-Poinsot le soluzioni delle equazioni*

$$\left. \frac{d}{dt}(\mathfrak{I}_O \vec{\omega}) \right|_{\Sigma'} = \mathfrak{I}_O \vec{\omega} \times \vec{\omega}, \quad (9.19)$$

*cioè le soluzioni delle equazioni di Eulero (9.17) con  $\vec{N}_O = \vec{0}$ .*

Con le equazioni (9.19) possiamo studiare il moto di un corpo rigido pesante, cioè soggetto alla forza di gravità, vincolato al suo baricentro, ma anche il moto di un corpo rigido pesante libero di muoversi nello spazio. Per quest'ultimo caso basta infatti studiare il moto nel riferimento del baricentro, che quindi diventa un punto fisso. Le equazioni (9.19), scritte in coordinate nella base  $\mathcal{B}'$ , diventano

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 &= (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3, \\ I_2 \dot{\omega}_2 &= (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1, \\ I_3 \dot{\omega}_3 &= (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2. \end{cases} \quad (9.20)$$

Si può descrivere la soluzione generale di queste equazioni tramite l'uso di funzioni speciali, vedi [19]. È comunque interessante ottenere una descrizione delle

soluzioni dal punto di vista geometrico utilizzando solo gli integrali primi della norma del momento angolare e dell'energia cinetica infatti, anche se le componenti  $M_1, M_2, M_3$  del momento angolare nella base  $\mathcal{B}'$  in generale non si conservano, si conserva la loro norma euclidea  $|\mathbf{M}_O|$ , in quanto si conservano le componenti di  $\vec{\mathbf{M}}_O$  nella base  $\mathcal{B}$  e la matrice di cambiamento di base da  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}'$  è una matrice di rotazione. Inoltre si conserva l'energia cinetica poiché la potenza della reazione vincolare è nulla, infatti

$$\dot{T} = \Pi = \vec{\mathbf{R}}^{(E)} \cdot \vec{\mathbf{v}}_O + \vec{\mathbf{N}}_O^{(E)} \cdot \vec{\boldsymbol{\omega}} = 0,$$

dove  $\vec{\mathbf{R}}^{(E)}$  è la risultante delle forze esterne e  $\vec{\mathbf{N}}_O^{(E)}$  è il momento risultante delle forze esterne rispetto al punto fisso  $O$ , vedi (9.13) e (9.14).

Introduciamo la seguente

**Definizione 27.** *L'insieme*

$$\mathcal{E}_O = \{O + \vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{E}^3 : \vec{\mathbf{x}} \cdot \mathfrak{I}_O \vec{\mathbf{x}} = 1\}$$

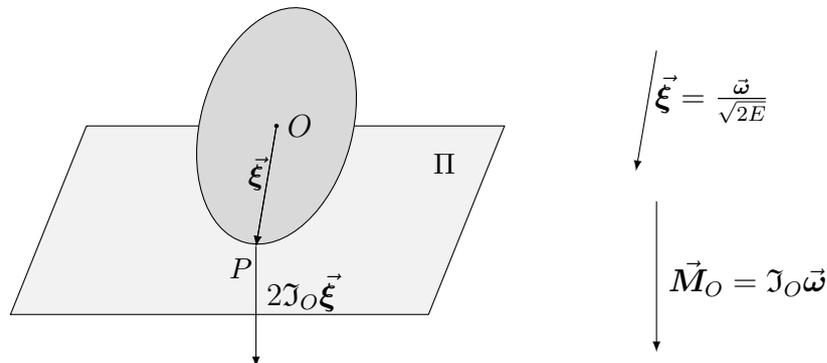
si dice **ellissoide di inerzia** relativo al punto  $O$ .

Le coordinate  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  dei punti dell'ellissoide di inerzia nel riferimento  $\Sigma'$  soddisfano la relazione

$$I_1 x_1^2 + I_2 x_2^2 + I_3 x_3^2 = 1,$$

quindi gli assi principali dell'ellissoide sono diretti lungo le direzioni principali di inerzia e le loro lunghezze sono  $1/\sqrt{I_j}$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

**Proposizione 57. (Poinsot)** *In un moto per inerzia di un corpo rigido con punto fisso  $O$  l'ellissoide di inerzia relativo al polo  $O$  rotola senza strisciare su un piano fisso  $\Pi$  perpendicolare al vettore momento angolare  $\vec{\mathbf{M}}_O$ .*



*Dimostrazione.* Sia  $E$  il valore costante dell'energia cinetica:

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathcal{I}_O \vec{\omega} = E.$$

Il punto  $P = O + \vec{\xi}$ , con  $\vec{\xi} = \vec{\omega} / \sqrt{2E}$ , appartiene all'ellissoide di inerzia  $\mathcal{E}_O$ , infatti

$$\vec{\xi} \cdot \mathcal{I}_O \vec{\xi} = \frac{\vec{\omega} \cdot \mathcal{I}_O \vec{\omega}}{2E} = 1.$$

Osserviamo inoltre che:

1. ad ogni istante il piano tangente all'ellissoide nel punto  $P$  è ortogonale a  $\vec{M}_O$ , infatti

$$\nabla_{\mathbf{x}}(\mathbf{x} \cdot I_O \mathbf{x}) = 2I_O \mathbf{x}$$

e, sostituendo  $\xi = \omega / \sqrt{2E}$  al posto di  $\mathbf{x}$ , otteniamo

$$2I_O \xi = \sqrt{\frac{2}{E}} I_O \omega = \sqrt{\frac{2}{E}} \mathbf{M}_O.$$

Quindi  $2I_O \xi$ , che rappresenta un vettore normale all'ellissoide in  $P$ , è parallelo al momento angolare, che è costante nel riferimento  $\Sigma$ .

2. La distanza di tale piano da  $O$  è costante, infatti questa è data da

$$\frac{\xi \cdot \mathbf{M}_O}{|\mathbf{M}_O|} = \frac{\omega \cdot \mathbf{M}_O}{\sqrt{2E} |\mathbf{M}_O|} = \frac{\sqrt{2E}}{|\mathbf{M}_O|}.$$

3. La velocità del punto dell'ellissoide a contatto col piano è nulla, infatti l'ellissoide è solidale al corpo e  $O\xi$  è l'asse istantaneo di rotazione perché da  $\vec{v}_O = \vec{0}$  e  $\vec{\xi} \parallel \vec{\omega}$  segue che tutti i punti solidali al corpo su  $O\xi$  hanno velocità nulla.

□

Si chiama **poloide** la curva tracciata sulla superficie dell'ellissoide di inerzia dai punti dell'ellissoide a contatto con il piano fisso; si chiama **erpoloide** la curva tracciata sul piano fisso dai punti del piano  $\Pi$ .

Esaminiamo in dettaglio il caso perfettamente simmetrico ( $I_1 = I_2 = I_3$ ), il caso a simmetria giroscopica ( $I_1 = I_2 \neq I_3$ ) e il caso generico ( $I_1 > I_2 > I_3$ ).

**Caso 1:**  $I_1 = I_2 = I_3 = I$

Ad esempio, questo è il caso di un corpo sferico omogeneo o di un corpo formato da 8 masse uguali disposte ai vertici di un cubo, vedi Esercizio 24.

Se la matrice che rappresenta  $\mathcal{J}_O$  nella base principale  $\mathcal{B}'$  è un multiplo dell'identità, allora lo è in qualunque altra base. Abbiamo quindi la relazione

$$\vec{M}_O = I \vec{\omega} \quad (9.21)$$

Siccome  $\vec{M}_O$  è un integrale primo nel sistema di riferimento  $\Sigma$ , anche  $\vec{\omega} = \vec{M}_O/I$  è costante lungo le orbite, quindi il moto per inerzia è un moto rotatorio uniforme attorno a un asse fisso nello spazio (nel riferimento inerziale), che è l'asse istantaneo di rotazione. Questo segue dalla formula fondamentale della cinematica rigida applicata ad un generico punto  $P$  e al punto fisso  $O$ :

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times (P - O). \quad (9.22)$$

Se ruotiamo il sistema di riferimento  $\Sigma$  in modo da avere  $\vec{\omega} = \omega \hat{e}_3$ , con  $\omega \in \mathbb{R}$ , e denotiamo con  $x, y, z$  le coordinate di  $P$  in  $\Sigma$ , l'equazione (9.22) si scrive

$$\dot{x} = -\omega y, \quad \dot{y} = \omega x, \quad \dot{z} = 0,$$

che ha per soluzione

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}, \quad z(t) = z(0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Lo stesso risultato si può ottenere anche dalla descrizione del campo delle velocità che abbiamo fatto in precedenza.

Osserviamo che in questo caso i vettori  $\vec{\omega}$  e  $\vec{M}_O$  sono costanti anche nel sistema di riferimento  $\Sigma'$ , solidale al corpo.

**Caso 2:**  $I_1 = I_2 \neq I_3$  (simmetria giroscopica)

**Proposizione 58.** *I vettori  $\vec{\omega}$ ,  $\hat{e}'_3$ ,  $\vec{M}_O$  soddisfano le seguenti proprietà:*

1.  $\omega_3$  e  $|\boldsymbol{\omega}|$  sono costanti;
2. il momento angolare  $\vec{M}_O$ , la velocità angolare  $\vec{\omega}$  e l'asse  $\hat{e}'_3$  sono coplanari;
3. gli angoli tra due qualsiasi dei vettori  $\vec{M}_O, \vec{\omega}, \hat{e}'_3$  sono costanti.

**Osservazione 39.** *La terza proprietà ci dice in particolare che sono costanti le componenti del vettore velocità angolare  $\vec{\omega}$  sui vettori  $\hat{e}'_3$  ed  $\vec{M}_O$ .*

*Dimostrazione.* Le equazioni di Eulero si scrivono nel modo seguente

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 = (I_1 - I_3) \omega_2 \omega_3, \\ I_1 \dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1, \\ I_3 \dot{\omega}_3 = 0, \end{cases} \quad (9.23)$$

dunque otteniamo

$$\omega_3 = \text{costante}, \quad \omega_1^2 + \omega_2^2 = \text{costante},$$

per cui è costante anche  $|\boldsymbol{\omega}|$ .

Siano  $\alpha$  l'angolo tra  $\vec{M}_O$  ed  $\vec{\omega}$ ,  $\beta$  l'angolo tra  $\vec{\omega}$  ed  $\hat{e}'_3$  e  $\gamma$  l'angolo tra  $\vec{M}_O$  ed  $\hat{e}'_3$ . Scriviamo le espressioni dei coseni di tali angoli:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\vec{M}_O \cdot \boldsymbol{\omega}}{|\vec{M}_O| |\boldsymbol{\omega}|} = \frac{2E}{|\vec{M}_O| |\boldsymbol{\omega}|}, \\ \cos \beta &= \frac{\omega_3}{|\boldsymbol{\omega}|}, \\ \cos \gamma &= \frac{M_3}{|\vec{M}_O|} = \frac{I_3 \omega_3}{|\vec{M}_O|}. \end{aligned}$$

Usando il punto 1., la conservazione dell'energia cinetica e della norma del momento angolare otteniamo che  $\cos \alpha$  è costante. Dal punto 1. segue immediatamente che anche  $\cos \beta$  è costante. La dimostrazione che  $\cos \gamma$  è costante si fa in modo analogo.

Il fatto che i vettori  $\vec{M}_O$ ,  $\vec{\omega}$ ,  $\hat{e}'_3$  siano coplanari durante il moto si ottiene dalla relazione

$$\det \begin{pmatrix} I_1 \omega_1 & I_1 \omega_2 & I_3 \omega_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

□

**Proposizione 59. (coni di Poinsot)** *Si consideri il moto di un corpo rigido con un punto fisso  $O$  avente simmetria giroscopica attorno all'asse  $\hat{e}'_3$ . Il vettore  $\vec{\omega}$  ruota uniformemente attorno alla direzione fissa del momento angolare  $\vec{M}_O$  descrivendo un cono di rotazione  $\mathcal{C}$  con velocità angolare costante. Analogamente la traccia di  $\vec{\omega}$  sul corpo descrive un cono di rotazione  $\mathcal{C}'$  con velocità angolare costante. Considerando  $\mathcal{C}$  fisso e  $\mathcal{C}'$  solidale al corpo rigido, si ha che i due coni rotolano l'uno sull'altro senza strisciare.*

*Dimostrazione.* Il vettore  $\vec{\omega}$  descrive un cono in entrambi i sistemi di riferimento poiché l'angolo tra  $\vec{\omega}$  ed  $\vec{M}_O$  e l'angolo tra  $\vec{\omega}$  ed  $\hat{e}'_3$  sono costanti. A questi due coni, denotati con  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{C}'$ , possiamo attribuire un moto considerandoli solidali a  $\Sigma$

e  $\Sigma'$  rispettivamente. Si ottiene che  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{C}'$  rotolano senza strisciare l'uno sull'altro poiché i punti del corpo che si trovano sull'asse passante per  $O$  e parallelo ad  $\vec{\omega}$  hanno tutti velocità nulla ( $O\vec{\omega}$  è l'asse istantaneo di rotazione e  $\vec{v}_O = \vec{0}$ ). Tale asse corrisponde alla retta istantanea di contatto tra i due coni e ha velocità istantanea nulla sia nel sistema di riferimento inerziale che nel riferimento solidale (la derivata temporale di  $\vec{\omega}$  fatta nei due riferimenti è la stessa).

Dimostriamo adesso che il moto di rotazione è uniforme. Posto

$$\hat{e}_{M_O} = \frac{\vec{M}_O}{|\vec{M}_O|}$$

si ha

$$\vec{\omega} = \omega' \hat{e}_{M_O} + \omega'' \hat{e}'_3,$$

con  $\omega', \omega''$  costanti. Dalle formule di Poisson segue che

$$\left. \frac{d}{dt} \hat{e}'_3 \right|_{\Sigma} = \vec{\omega} \times \hat{e}'_3 = \omega' \hat{e}_{M_O} \times \hat{e}'_3.$$

Quindi  $\hat{e}'_3$  ruota uniformemente attorno a  $O\hat{e}_{M_O}$ , costante in  $\Sigma$ , e per la coplanarità di  $\hat{e}'_3$ ,  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{M}_O$  e l'invarianza dell'angolo tra  $\vec{\omega}$  ed  $\hat{e}'_3$  trascina nel suo moto uniforme attorno ad  $O\hat{e}_{M_O}$  anche  $\vec{\omega}$ .

La dimostrazione del moto rotatorio uniforme di  $\vec{\omega}$  attorno ad  $\hat{e}'_3$  in  $\Sigma'$  si fa in modo analogo a partire dall'equazione differenziale

$$\left. \frac{d}{dt} \hat{e}_{M_O} \right|_{\Sigma'} = -\vec{\omega} \times \hat{e}_{M_O} = -\omega'' \hat{e}'_3 \times \hat{e}_{M_O},$$

che segue dalla relazione

$$\left. \frac{d}{dt} \hat{e}_{M_O} \right|_{\Sigma} = \left. \frac{d}{dt} \hat{e}_{M_O} \right|_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times \hat{e}_{M_O}$$

e dal fatto che

$$\left. \frac{d}{dt} \hat{e}_{M_O} \right|_{\Sigma} = \vec{0}.$$

□

**Caso 3:**  $I_1 > I_2 > I_3$

Le equazioni di Eulero (9.19) ammettono sempre gli integrali primi

$$\begin{cases} |\vec{M}_O|^2 = I_1^2 \omega_1^2 + I_2^2 \omega_2^2 + I_3^2 \omega_3^2, \\ T = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2). \end{cases}$$

**Definizione 28.** *Chiamiamo rotazioni stazionarie le soluzioni  $\vec{\omega}_s$  costanti delle equazioni di Eulero (9.19).*

Ricordiamo che  $\vec{\omega}$  è costante nel riferimento  $\Sigma$  se e solo se è costante in  $\Sigma'$ .

Dalla (9.19) si vede quindi che se  $\vec{\omega}_s$  è una rotazione stazionaria si ha

$$\mathfrak{I}_O \vec{\omega}_s \parallel \vec{\omega}_s,$$

cioè le rotazioni stazionarie sono gli autovettori di  $\mathfrak{I}_O$  e quindi sono necessariamente parallele ad uno degli  $\hat{e}'_j$ . Si parla dunque di rotazioni stazionarie attorno agli assi  $O\hat{e}'_1$ ,  $O\hat{e}'_2$ ,  $O\hat{e}'_3$ . Dalla relazione  $\vec{M}_O = \mathfrak{I}_O \vec{\omega}_s$  si ottiene che anche  $\vec{M}_O$  deve essere parallelo ad  $\vec{\omega}_s$ . Quindi in questo caso  $\vec{M}_O$  è costante anche in  $\Sigma'$ . Per capire la geometria delle traiettorie delle soluzioni di (9.19) consideriamo le equazioni di Eulero scritte nella forma

$$\left. \frac{d}{dt} \vec{M}_O \right|_{\Sigma'} = \vec{M}_O \times \vec{\omega}. \quad (9.24)$$

Siano  $c^2, E$  i valori degli integrali primi  $|\mathbf{M}_O|^2, T$ . Le relazioni

$$\begin{cases} M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = c^2, \\ \frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_3} = 2E \end{cases} \quad (9.25)$$

rappresentano l'intersezione di una sfera di raggio  $|c|$  con un ellissoide di semiasse  $\sqrt{2EI_j}$ ,  $j = 1, 2, 3$ , e individuano le traiettorie possibili per le coordinate  $(M_1, M_2, M_3)$  del momento angolare nella base  $\mathcal{B}'$ . Fissiamo un valore  $E$  per l'energia e consideriamo l'insieme delle coordinate  $(M_1, M_2, M_3)$  che soddisfano (9.25). Il fatto che questo insieme sia non vuoto è garantito dalle relazioni

$$2EI_3 \leq c^2 \leq 2EI_1.$$

Descriviamo l'insieme delle traiettorie delle soluzioni di (9.20) nei vari casi. Ci sono cinque possibilità:

- 1)  $2EI_3 = c^2$ ,
- 2)  $2EI_3 < c^2 < 2EI_2$ ,
- 3)  $c^2 = 2EI_2$ ,
- 4)  $2EI_2 < c^2 < 2EI_1$ ,
- 5)  $c^2 = 2EI_1$ .

Nel caso 1) abbiamo due punti di equilibrio sull'asse  $O\hat{e}'_3$ , che corrispondono alle rotazioni stazionarie con  $\vec{\omega}$  parallelo a  $\hat{e}'_3$ . Nel caso 2) abbiamo due curve chiuse

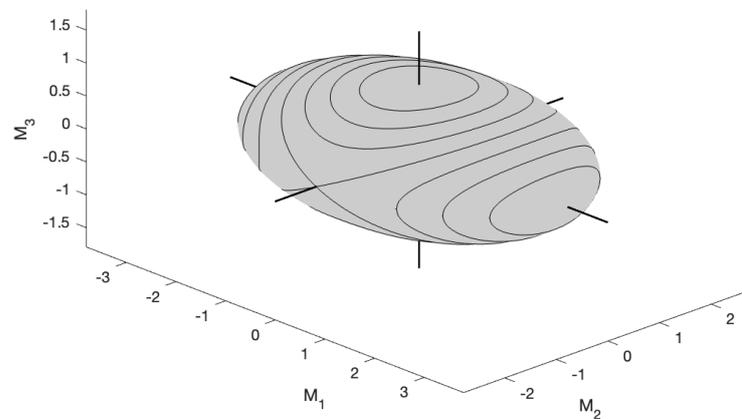


Figura 9.1: Possibili traiettorie della curva  $t \mapsto \mathbf{M}_O(t)$ , soluzione di (9.24), ottenute fissando un valore di  $T$  e usando valori diversi di  $|\mathbf{M}|$ .

attorno all'asse  $O\hat{e}'_3$ . Nel caso 3) abbiamo due punti di equilibrio sull'asse  $O\hat{e}'_2$  e quattro curve che li congiungono, che corrispondono alle separatrici stabili e instabili delle equazioni (9.24) ristrette all'ellissoide di energia costante. Nel caso

4) abbiamo due curve chiuse attorno all'asse  $O\hat{e}'_1$ . Nel caso 5) abbiamo due punti di equilibrio sull'asse  $O\hat{e}'_1$ .

Osservando le curve disegnate nella Figura 9.1 possiamo concludere che le rotazioni stazionarie attorno agli assi  $O\hat{e}'_1$  e  $O\hat{e}'_3$ , corrispondenti ai momenti principali di inerzia massimo e minimo, sono stabili. Invece, le rotazioni stazionarie attorno a  $O\hat{e}'_2$  sono instabili. La definizione formale di stabilità degli equilibri è enunciata di seguito.

### 9.3.1 Equilibri e stabilità

Consideriamo un sistema di equazioni differenziali

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \quad m \geq 1. \quad (9.26)$$

**Definizione 29.** Si definiscono **equilibri** di (9.26) i punti  $\mathbf{x}_0$  tali che  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ .

**Definizione 30.** Un equilibrio  $\mathbf{x}_0$  è **stabile** (per tempi positivi) se per ogni intorno  $U$  di  $\mathbf{x}_0$  esiste un intorno  $V$  di  $\mathbf{x}_0$ ,  $V \subseteq U$ , tale che per ogni  $\mathbf{y} \in V$ , la soluzione  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t; \mathbf{y})$  di (9.26) con condizione iniziale  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{y}$  soddisfa

$$\mathbf{x}(t; \mathbf{y}) \in U, \quad \forall \mathbf{y} \in V, \quad \forall t \geq 0.$$

**Definizione 31.** Un equilibrio  $\mathbf{x}_0$  è **instabile** (per tempi positivi) se non è stabile, cioè se esiste un intorno  $U$  di  $\mathbf{x}_0$  tale che per ogni intorno  $V$  di  $\mathbf{x}_0$  con  $V \subseteq U$  esistono  $\mathbf{y} \in V$  e  $\bar{t} > 0$  tali che la soluzione  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t; \mathbf{y})$  di (9.26) con condizione iniziale  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{y}$  soddisfa

$$\mathbf{x}(\bar{t}; \mathbf{y}) \notin U.$$

Descriviamo due esempi standard di equilibri di sistemi autonomi piani lineari: uno è stabile, l'altro instabile.

**Esempio 19.** (*centro*) Il sistema

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x \quad (9.27)$$

ha l'origine  $(x, y) = (0, 0)$  come unico equilibrio. Inoltre esso ammette l'integrale primo

$$G(x, y) = x^2 + y^2,$$

infatti

$$\dot{G}(x, y) = 2(x\dot{x} + y\dot{y}) = 2(-xy + yx) = 0,$$

per cui le traiettorie delle soluzioni diverse dall'equilibrio sono circonferenze centrate nell'origine (vedi Figura 9.2 a sinistra). Questo ci permette di dire che l'origine è stabile.

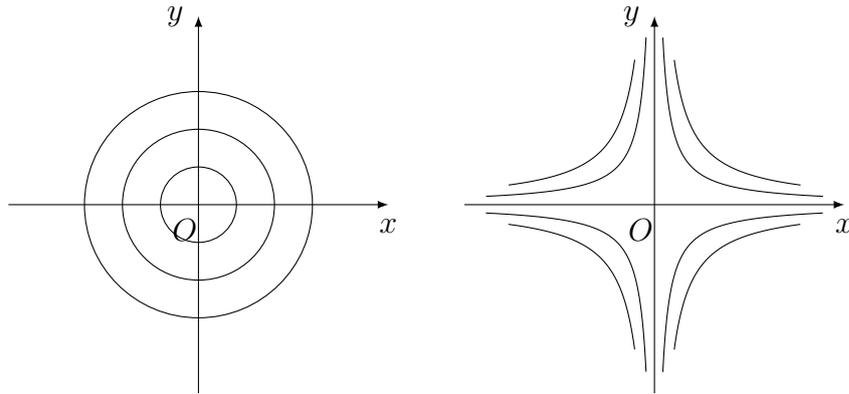


Figura 9.2: Sinistra: equilibrio di tipo centro. Destra: equilibrio di tipo sella.

**Esempio 20.** (*sella*) Il sistema

$$\dot{x} = -x, \quad \dot{y} = y \quad (9.28)$$

ha l'origine  $(x, y) = (0, 0)$  come unico equilibrio. Inoltre esso ammette l'integrale primo

$$G(x, y) = xy,$$

infatti

$$\dot{G}(x, y) = \dot{x}y + x\dot{y} = -xy + xy = 0,$$

per cui le traiettorie delle soluzioni diverse da quelle che giacciono sugli assi coordinati sono delle iperboli (vedi Figura 9.2 a destra). Questo ci permette di dire che l'origine è instabile.

### 9.3.2 Fase geometrica nel moto del corpo rigido

Consideriamo adesso un moto periodico attorno ad un asse di una rotazione stazionaria stabile, per esempio attorno a  $O\hat{e}_1$ . Dopo un periodo di  $\mathbf{M}_O$  in  $\Sigma'$  le proiezioni di  $\mathbf{M}_O$  su  $\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3$  hanno gli stessi valori iniziali. Quindi i vettori  $\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3$  del sistema solidale  $\Sigma'$ , e dunque tutti i punti del corpo rigido, tornano ad avere la stessa distanza dall'asse  $O\mathbf{M}_O$ , fisso in  $\Sigma$ .

Vogliamo calcolare l'angolo  $\Delta\theta$ , che ci dice di quanto è ruotato il corpo rigido dopo un periodo di  $\mathbf{M}_O$ .

Riportiamo qui una formula dimostrata da Montgomery in [14]:

$$\Delta\theta = 2 \frac{ET}{|\mathbf{M}_O|} - \Omega \quad (9.29)$$

in cui  $T$  è il periodo del moto ed  $\Omega$  è l'angolo solido tracciato dalla direzione del momento angolare  $\vec{M}_O$  sulla sfera unitaria centrata in  $O$  e solidale al corpo.

In [10] si trova una dimostrazione della formula (9.29) utilizzando il teorema di Gauss-Bonnet e la Proposizione 57.

## 9.4 Effetto giroscopico

Si consideri un corpo rigido a simmetria giroscopica, con un punto fisso  $O$  e momenti principali di inerzia  $I_j$ , con  $I_1 = I_2 \neq I_3$

Se il corpo è omogeneo, per esempio una trottola, l'asse  $O\hat{e}'_3$  corrisponde al suo asse di simmetria (**asse giroscopico**). Introduciamo la componente della velocità angolare  $\vec{\omega}$  ortogonale a tale asse:

$$\vec{\omega}^\perp = \omega_1 \hat{e}'_1 + \omega_2 \hat{e}'_2.$$

Il momento angolare rispetto ad  $O$  si può scrivere

$$\vec{M}_O = I_1 \vec{\omega}^\perp + I_3 \omega_3 \hat{e}'_3.$$

Supponiamo che la componente lungo  $\hat{e}'_3$  del momento delle forze attive esterne rispetto ad  $O$  sia nulla:

$$N_3 = \vec{N}_O \cdot \hat{e}'_3 = 0.$$

L'equazione di bilancio del momento angolare diventa quindi

$$\left. \frac{d}{dt} \vec{M}_O \right|_\Sigma = \left. \frac{d}{dt} (I_1 \vec{\omega}^\perp + I_3 \omega_3 \hat{e}'_3) \right|_\Sigma = \vec{N}_O = N_1 \hat{e}'_1 + N_2 \hat{e}'_2. \quad (9.30)$$

Le equazioni di Eulero si scrivono

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 = (I_1 - I_3) \omega_2 \omega_3 + N_1, \\ I_1 \dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 + N_2, \\ I_3 \dot{\omega}_3 = 0. \end{cases}$$

Consideriamo condizioni iniziali della forma

$$\omega_1(0) = \omega_2(0) = 0, \quad \omega_3(0) \gg 1.$$

Osserviamo che, anche se in generale non si avrà  $\omega_1(t) = \omega_2(t) = 0$  per ogni  $t > 0$ . Assumiamo che

$$\vec{\omega}^\perp(t) \simeq \vec{0} \quad (9.31)$$

almeno per un certo intervallo di tempo, insieme con la sua derivata temporale in  $\Sigma$  di  $\vec{\omega}^\perp$ . Dato che  $\omega_3(t) = \omega_3(0)$ ,  $\forall t > 0$ , per l'ipotesi (9.31) possiamo approssimare l'equazione (9.30) con

$$I_3\omega_3(0) \left. \frac{d}{dt} \hat{e}'_3 \right|_\Sigma = N_1 \hat{e}'_1 + N_2 \hat{e}'_2. \quad (9.32)$$

Dalla (9.32) segue che, se il momento  $\vec{N}_O$  è prodotto da una forza  $\vec{F}$  applicata in un punto  $P \neq O$  dell'asse giroscopico  $O\hat{e}'_3$ , quest'ultimo non si sposta nella direzione della forza ma nella direzione di  $\vec{N}_O$ , ad essa perpendicolare (**tendenza al parallelismo** dell'asse giroscopico al momento  $\vec{N}_O$ ).

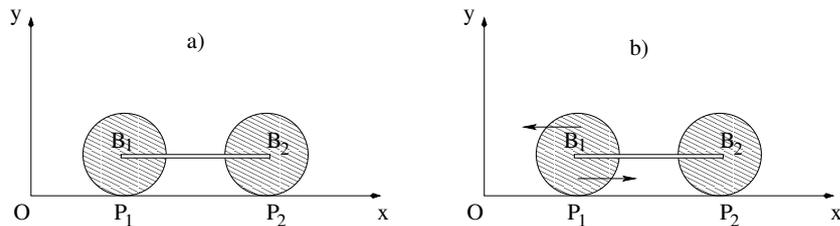
Dalla (9.32) segue anche che per provocare un determinato spostamento dell'asse giroscopico è necessario un momento delle forze attive di norma tanto più grande quanto più grande è  $\omega_3(0)$  (**tenacia dell'asse giroscopico**).

## 9.5 Esercizi

**Esercizio 38.** Si consideri il sistema meccanico piano formato da due dischi omogenei  $\mathcal{D}_1$ ,  $\mathcal{D}_2$  di massa  $m$  e raggio  $R$  i cui baricentri  $B_1$ ,  $B_2$  sono vincolati agli estremi di un'asta di massa trascurabile e lunghezza  $\ell > 2R$ . I dischi possono rotolare senza strisciare sull'asse  $x$  di un sistema di riferimento  $Oxy$  verticale (vedi figura).

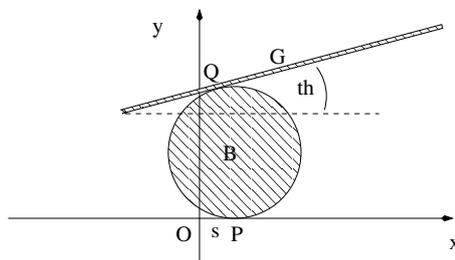
a) Utilizzando come coordinata l'ascissa  $s$  del baricentro  $B_1$  si scriva l'equazione del moto del sistema e se ne determini il moto. Si trovino inoltre le componenti delle reazioni vincolari  $\vec{\Phi}_1$ ,  $\vec{\Phi}_2$ , esercitate in  $P_1$ ,  $P_2$ , lungo la direzione dell'asse  $Ox$ .

b) Si applichi al disco  $\mathcal{D}_1$  un motorino di massa trascurabile, che genera sul disco una coppia di forze di momento  $L\hat{e}_3$ . Assumiamo per semplicità le condizioni iniziali  $s(0) = \dot{s}(0) = 0$ : come cambiano le risposte al punto precedente?



**Esercizio 39.** In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento  $Oxy$ , con asse  $Oy$  verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico descritto in figura, composto da un disco omogeneo di massa  $M$  e raggio  $R$  che può rotolare senza

strisciare sull'asse  $Ox$ . Sul disco può a sua volta rotolare senza strisciare un'asta omogenea di massa  $m$  e lunghezza  $\ell$ . Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione  $g$ . Si usino come coordinate l'ascissa  $s$  del baricentro  $B$  del disco e

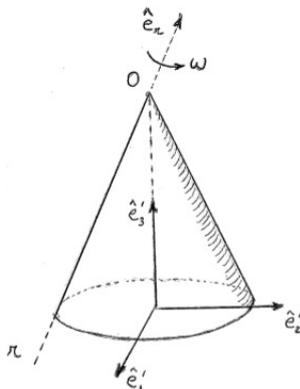


l'angolo  $\theta$  tra l'asta e la direzione orizzontale e si assuma che per  $s = 0, \theta = 0$  il punto di contatto  $Q$  tra asta e disco coincida col baricentro  $G$  dell'asta.

(i) Determinare il centro istantaneo di rotazione dell'asta;

(ii) scrivere la seconda equazione cardinale per la sola asta rispetto al polo  $Q$ .

**Esercizio 40.** Si fissi un sistema di riferimento  $\Sigma = Oe_1e_2e_3$ . Si consideri un cono finito omogeneo di massa  $m$ , con raggio di base  $R$  e semiapertura  $\alpha$ , il cui vertice è incernierato nell'origine  $O$  di  $\Sigma$ .



Assumendo che il cono ruoti attorno all'asse  $Oe_3$  con velocità angolare costante  $\omega \hat{e}_3$ , mantenendo una delle sue generatrici su quest'asse (vedi figura), determinare il momento risultante delle forze che agiscono sul cono rispetto al suo vertice  $O$ .

**Esercizio 41.** Si fissi un riferimento  $Oxyz$  con asse  $Oz$  verticale ascendente e si consideri il sistema meccanico costituito da una sfera piena omogenea di massa  $m$  e raggio  $r$  che può rotolare senza strisciare sul piano  $Oxy$ . Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione  $g$ .

1. Usando le equazioni cardinali della Dinamica descrivere il moto del baricentro  $B$  della sfera e la reazione vincolare  $\vec{\Phi}$  esercitata sul punto della sfera  $P$  a contatto col piano  $Oxy$ .
2. Si risponda alla domanda del punto precedente assumendo stavolta che l'asse  $Oz$  sia inclinato di un angolo  $\alpha \in (0, \pi/2)$  rispetto alla verticale e che  $Oy$  abbia la direzione di massima pendenza.

# Capitolo 10

## Le equazioni di Lagrange

Introduciamo i vincoli ideali e le equazioni del principio di D'Alembert, dalle quali ricaviamo le equazioni di Lagrange, ad esse equivalenti. Vediamo poi come si possono scrivere le equazioni di Lagrange in presenza di forze generalizzate conservative, cioè quando esiste un'energia potenziale, anche generalizzata.

### 10.1 La matrice cinetica

Consideriamo un sistema di  $N$  punti materiali  $P_1, \dots, P_N$  di masse  $m_1, \dots, m_N$ , soggetti a vincoli olonomi con varietà delle configurazioni  $\mathcal{C}_t$ , che può dipendere dal tempo  $t$ . Introduciamo per ogni istante  $t$  un sistema di coordinate locali su  $\mathcal{C}_t$ :

$$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{q} \mapsto \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t) \in \mathcal{C}_t \subset \mathbb{R}^{3N},$$

con  $\boldsymbol{\chi} = (\chi_1, \dots, \chi_N)$  dove  $\chi_j \in \mathbb{R}^3$  sono le coordinate cartesiane di  $P_j$ .

**Proposizione 60.** *L'energia cinetica  $T$  è una funzione quadratica delle velocità lagrangiane  $\dot{\mathbf{q}}$ . In particolare*

$$T = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + T_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + T_0(\mathbf{q}, t),$$

dove  $T_i$  è omogenea di grado  $i$  nelle variabili  $\dot{\mathbf{q}}$ . Inoltre  $T_2 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}}$ , in cui la matrice  $A(\mathbf{q}, t)$  è simmetrica e definita positiva.

*Dimostrazione.* Introduciamo la matrice diagonale di ordine  $3N$

$$M = \text{diag}\{m_1, m_1, m_1, \dots, m_N, m_N, m_N\}, \quad (10.1)$$

in cui ogni massa  $m_j$  dei punti del sistema appare tre volte sulla diagonale. Sia inoltre

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{h=1}^n \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_h + \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t}(\mathbf{q}, t)$$

il vettore di  $\mathbb{R}^{3N}$  che rappresenta le velocità possibili degli  $N$  punti. Con questa notazione l'energia cinetica si scrive

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j |\mathbf{v}_j|^2 = \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot M \mathbf{v} = \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{h=1}^n \frac{\partial \chi}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) \cdot M \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial \chi}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) = T_2 + T_1 + T_0, \end{aligned}$$

con

$$T_2 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}}, \quad T_1 = \mathbf{b}(\mathbf{q}, t) \cdot \dot{\mathbf{q}}, \quad T_0 = \frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial t} \cdot M \frac{\partial \chi}{\partial t},$$

dove  $A = A(\mathbf{q}, t)$  è una matrice simmetrica, detta **matrice cinetica**, con coefficienti

$$a_{hk} = \frac{\partial \chi}{\partial q_h} \cdot M \frac{\partial \chi}{\partial q_k}, \quad h, k = 1, \dots, n,$$

e  $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{q}, t)$  è un vettore, con coefficienti

$$b_h = \frac{\partial \chi}{\partial q_h} \cdot M \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad h = 1, \dots, n.$$

Mostriamo che la matrice cinetica  $A$  è definita positiva.

Sia  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^T \in \mathbb{R}^n$  con  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ . Allora

$$\mathbf{u} \cdot A \mathbf{u} = \sum_{h,k=1}^n \frac{\partial \chi}{\partial q_h} \cdot M \frac{\partial \chi}{\partial q_k} u_h u_k = \left( \sum_{h=1}^n \frac{\partial \chi}{\partial q_h} u_h \right) \cdot M \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial \chi}{\partial q_k} u_k \right) > 0,$$

infatti  $M$  è definita positiva e, se  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ , si ha

$$\sum_{h=1}^n \frac{\partial \chi}{\partial q_h} u_h \neq \mathbf{0}$$

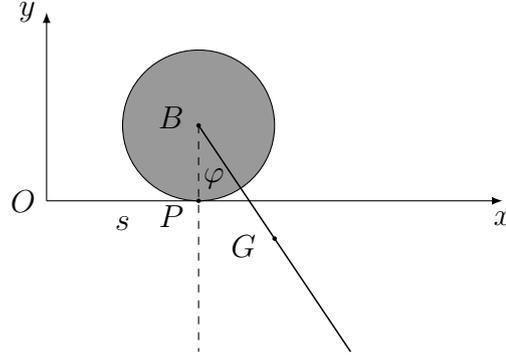
poichè i vettori  $\frac{\partial \chi}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \chi}{\partial q_n}$  sono linearmente indipendenti. □

**Osservazione 40.** *Nel caso di vincoli fissi si ha semplicemente*

$$T = T_2 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}},$$

*cioè l'energia cinetica è una forma quadratica omogenea nelle velocità lagrangiane.*

**Esempio 21.** Calcoliamo la matrice cinetica per il sistema meccanico piano composto da un disco omogeneo di massa  $M$  e raggio  $r$  e da un'asta omogenea di massa  $m$  e lunghezza  $2\ell$ . Il disco può rotolare senza strisciare sull'asse  $Ox$  di un riferimento  $\Sigma = Oxy$  nel piano del moto e l'asta ha un estremo incernierato nel baricentro  $B$  del disco.



Sia  $G$  il baricentro dell'asta. Le coordinate della posizione e della velocità di  $B$  e  $G$  sono date da

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_B &= s\mathbf{e}_1 + r\mathbf{e}_2, & \mathbf{x}_G &= (s + \ell \sin \varphi)\mathbf{e}_1 + (r - \ell \cos \varphi)\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{v}_B &= \dot{s}\mathbf{e}_1, & \mathbf{v}_G &= (\dot{s} + \ell\dot{\varphi} \cos \varphi)\mathbf{e}_1 + \ell\dot{\varphi} \sin \varphi \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

Calcoliamo adesso l'energia cinetica del sistema. Le velocità angolari del disco e dell'asta sono rispettivamente

$$\boldsymbol{\omega}_d = -\frac{\dot{s}}{r}\mathbf{e}_3, \quad \boldsymbol{\omega}_a = \dot{\varphi}\mathbf{e}_3$$

ed i loro momenti principali rispetto agli assi  $B\hat{\mathbf{e}}_3$  e  $G\hat{\mathbf{e}}_3$  sono

$$I_3^d = \frac{1}{2}Mr^2, \quad I_3^a = \frac{1}{3}m\ell^2.$$

Usando il teorema di König si ottiene

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}M|\mathbf{v}_B|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_d \cdot I_3^d \boldsymbol{\omega}_d + \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_G|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_a \cdot I_3^a \boldsymbol{\omega}_a \\ &= \frac{1}{2} \left( \left( \frac{3}{2}M + m \right) \dot{s}^2 + \frac{4}{3}m\ell^2 \dot{\varphi}^2 + 2m\ell \cos \varphi \dot{\varphi} \dot{s} \right), \end{aligned} \quad (10.2)$$

quindi la matrice cinetica è

$$A(s, \varphi) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}M + m & m\ell \cos \varphi \\ m\ell \cos \varphi & \frac{4}{3}m\ell^2 \end{bmatrix},$$

che è definita positiva in quanto i determinanti dei minori principali

$$\frac{3}{2}M + m, \quad \det A = 2Mm\ell^2 + m^2\ell^2\left(\frac{4}{3} - \cos^2 \varphi\right) > 0$$

sono positivi.

**Osservazione 41.** *Nell'esempio precedente le dimensioni delle componenti della matrice cinetica non sono le stesse poiché  $s$  ha le dimensioni di una lunghezza e l'angolo  $\varphi$  è una coordinata adimensionale.*

## 10.2 Vincoli ideali e principio di D'Alembert

**Definizione 32.** *Diciamo che i vincoli olonomi considerati sono anche **ideali** se il vettore delle reazioni vincolari  $(\Phi_1, \dots, \Phi_N)$  che essi possono esercitare sugli  $N$  punti del sistema in una qualunque configurazione  $\mathbf{x} \in \mathcal{C}_t$  ad un istante qualunque  $t$ , sia che i punti siano in quiete che in movimento, soddisfa ad ogni istante la relazione*

$$\sum_{j=1}^N \Phi_j \cdot \mathbf{v}_j = 0$$

per ogni scelta del vettore delle velocità virtuali  $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N) \in T_{\mathbf{x}}\mathcal{C}_t$ .

**Osservazione 42.** *I vincoli senza attrito o di puro rotolamento sono esempi di vincoli ideali.*

Sia  $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$  una qualunque soluzione delle equazioni di Newton

$$m_j \ddot{\mathbf{x}}_j(t) = \mathbf{F}_j(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) + \Phi_j(t), \quad j = 1, \dots, N.$$

Assumendo che i vincoli siano ideali possiamo scrivere

$$\sum_{j=1}^N \left( m_j \ddot{\mathbf{x}}_j(t) - \mathbf{F}_j(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) \right) \cdot \mathbf{v}_j = 0, \quad (10.3)$$

per ogni scelta del vettore delle velocità virtuali  $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N) \in T_{\mathbf{x}(t)}\mathcal{C}_t$ . Se queste equazioni sono soddisfatte diciamo che il sistema meccanico soddisfa il **principio di D'Alembert**.

Poiché i vettori

$$\frac{\partial \chi}{\partial q_1}(\mathbf{q}(t), t), \dots, \frac{\partial \chi}{\partial q_n}(\mathbf{q}(t), t)$$

formano ad ogni istante  $t$  una base di  $T_{\mathbf{x}(t)}\mathcal{C}_t$ , dove

$$\mathbf{x}(t) = \chi(\mathbf{q}(t), t), \quad (10.4)$$

le equazioni (10.3) sono soddisfatte se e solo se

$$\sum_{j=1}^N \left( m_j \ddot{\mathbf{x}}_j(t) - \mathbf{F}_j(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) \right) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h}(\mathbf{q}(t), t) = 0, \quad h = 1, \dots, n. \quad (10.5)$$

Le equazioni (10.5) sono **equazioni pure**, cioè non vi appaiono le reazioni vincolari. L'incognita è la curva  $\mathbf{q}(t)$ , infatti usando la relazione (10.4) abbiamo

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \sum_{h=1}^n \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}(\mathbf{q}(t), t) \dot{q}_h(t) + \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t}(\mathbf{q}(t), t) \\ \ddot{\mathbf{x}}(t) &= \sum_{h,k=1}^n \frac{\partial^2 \boldsymbol{\chi}}{\partial q_k \partial q_h}(\mathbf{q}(t), t) \dot{q}_h(t) \dot{q}_k(t) \\ &\quad + \sum_{h=1}^n \left( 2 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\chi}}{\partial t \partial q_h}(\mathbf{q}(t), t) \dot{q}_h(t) + \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}(\mathbf{q}(t), t) \ddot{q}_h(t) \right) + \frac{\partial^2 \boldsymbol{\chi}}{\partial t^2}(\mathbf{q}(t), t) \end{aligned} \quad (10.6)$$

dove abbiamo assunto che  $\boldsymbol{\chi}$  sia di classe  $C^2$ .

Consideriamo le forze generalizzate<sup>1</sup>

$$Q_h = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{v}, t) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h}, \quad h = 1, \dots, n \quad (10.7)$$

con

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t}(\mathbf{q}, t).$$

Osserviamo che (10.7) corrisponde alla (8.8), introdotta nel caso di vincoli fissi e forze indipendenti dal tempo. Utilizzando le forze generalizzate possiamo scrivere le equazioni (10.5) del principio di D'Alembert come

$$\sum_{j=1}^N m_j \ddot{\mathbf{x}}_j(t) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h}(\mathbf{q}(t), t) = Q_h(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t), \quad h = 1, \dots, n. \quad (10.8)$$

In generale, nel calcolo delle  $Q_h$  non possiamo sostituire al sistema di forze applicate  $\{(\vec{\mathbf{F}}_j, P_j)\}_j$  un qualunque sistema ad esso equivalente. Ad esempio, nel caso del problema dei 2 corpi si ha un sistema di due forze equilibrato, che è equivalente al sistema nullo, ma considerando il sistema nullo si ottiene un altro problema.

---

<sup>1</sup>tra le  $\mathbf{F}_j$  ci sono anche le forze interne: non importa che il sistema delle forze interne  $\{(\mathbf{F}_j^{(I)}, P_j)\}_j$  sia equilibrato perché in (10.7) non appaiono solo  $\mathbf{R}^{(I)}$ ,  $\mathbf{N}_Q^{(I)}$  come nelle equazioni cardinali.

Però nel caso di un corpo rigido eventualmente soggetto ad altri vincoli indipendenti dal tempo questo è possibile, infatti, per  $j = 1, \dots, N$ , si ha

$$\boldsymbol{\chi}_j(\mathbf{q}, t) = \boldsymbol{\chi}_{O'}(\mathbf{q}, t) + R(\mathbf{q}, t)\mathbf{x}'_j,$$

con  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^d$ ,  $1 \leq d \leq 6$ , per cui

$$\frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_{O'}}{\partial q_h} + \frac{\partial R}{\partial q_h} \mathbf{x}'_j.$$

Derivando rispetto a  $q_h$  la relazione  $RR^T = I$  si trova che la matrice

$$\Omega^{(h)} = \frac{\partial R}{\partial q_h} R^T$$

è antisimmetrica, quindi possiamo scrivere

$$\frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_{O'}}{\partial q_h} + \boldsymbol{\omega}^{(h)} \times R\mathbf{x}'_j = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_{O'}}{\partial q_h} + \boldsymbol{\omega}^{(h)} \times (\boldsymbol{\chi}_j - \boldsymbol{\chi}_{O'}),$$

dove  $\boldsymbol{\omega}^{(h)} = \boldsymbol{\omega}^{(h)}(\mathbf{q})$  è il vettore associato ad  $\Omega^{(h)}$  tramite la relazione

$$\Omega^{(h)}\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}^{(h)} \times \mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3.$$

Quindi, se  $\{(\mathbf{F}_j, \boldsymbol{\chi}_j)\}_j$  sono le coordinate del sistema di forze applicate ai punti del corpo, si ha

$$Q_h = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h} = \mathbf{R} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_{O'}}{\partial q_h} + \mathbf{N}_{O'} \cdot \boldsymbol{\omega}^{(h)},$$

cioè  $Q_h$  dipende solo dalla risultante  $\mathbf{R}$  e dal momento risultante  $\mathbf{N}_{O'}$  delle forze e dunque possiamo sostituire al sistema di forze applicate al corpo rigido un sistema ad esso equivalente.

**Esempio 22.** Calcoliamo le componenti lagrangiane  $Q_1, \dots, Q_n$  della forza di gravità nel caso di un sistema vincolato di  $N$  punti materiali  $P_1, \dots, P_N$  di masse  $m_1, \dots, m_N$ . Se  $\mathbf{q} \rightarrow \boldsymbol{\chi}_j(\mathbf{q}, t) \in \mathbb{R}^3$  rappresenta ad ogni istante  $t$  il vettore delle coordinate in  $\mathbb{R}^3$  del punto  $P_j$  in funzione delle coordinate lagrangiane  $\mathbf{q}$ , si ha

$$\begin{aligned} Q_h &= \sum_{j=1}^N (-m_j g \mathbf{e}_3) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h} = -g \mathbf{e}_3 \cdot \frac{\partial}{\partial q_h} \left( \sum_{j=1}^N m_j \boldsymbol{\chi}_j \right) \\ &= -g \mathbf{e}_3 \cdot \frac{\partial}{\partial q_h} m \boldsymbol{\chi}_B = -m g \mathbf{e}_3 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_B}{\partial q_h}, \end{aligned}$$

dove

$$\boldsymbol{\chi}_B = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^N m_j \boldsymbol{\chi}_j$$

fornisce le coordinate del baricentro  $B$  del sistema ed  $m = \sum_{j=1}^N m_j$  è la massa totale. Quindi, nel caso della forza di gravità si può sostituire il sistema di forze applicate  $\{(-m_j g \mathbf{e}_3, P_j)\}_j$  con un'unica forza  $-mg \mathbf{e}_3$  applicata al baricentro  $B$ .

Nel caso dei corpi continui le forze generalizzate sono definite dalle relazioni

$$Q_h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \int_C \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t; \mathbf{x}') \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}') d\mathbf{x}', \quad h = 1, \dots, n \quad (10.9)$$

dove  $\mathbf{x}'$  sono le coordinate dei punti del corpo in un riferimento solidale  $\Sigma'$  ed  $\mathbf{f}$  è una distribuzione continua di forze agenti sugli elementi materiali che costituiscono il corpo.

**Esempio 23.** Consideriamo un'asta omogenea di massa  $m$  e lunghezza  $2\ell$  che si può muovere in un piano  $Oxy$ , con un estremo incernierato nell'origine  $O$ . Assumiamo che tale piano ruoti uniformemente attorno all'asse  $Oy$  con velocità angolare costante  $\omega \hat{\mathbf{e}}_2$ . Usando come coordinata lagrangiana l'angolo  $\theta$  che l'asta forma con la direzione verticale calcoliamo la componente lagrangiana  $Q_\theta$  della forza centrifuga.

La densità di massa dell'asta è  $\lambda = \frac{m}{2\ell}$ . Se  $r$  è una coordinata lungo l'asta si ha

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\chi}(\theta; r) &= r \sin \theta \mathbf{e}_1 - r \cos \theta \mathbf{e}_2, & \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \theta}(\theta; r) &= r \cos \theta \mathbf{e}_1 + r \sin \theta \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{f}(\theta; r) &= -\lambda \omega^2 \mathbf{e}_2 \times (\mathbf{e}_2 \times \boldsymbol{\chi}) = \lambda \omega^2 (\boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1 = \lambda \omega^2 r \sin \theta \mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

Si trova che

$$Q_\theta = \int_0^{2\ell} \mathbf{f}(\theta; r) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \theta} dr = \lambda \omega^2 \int_0^{2\ell} r^2 \sin \theta \cos \theta dr = \frac{4}{3} m \ell^2 \omega^2 \sin \theta \cos \theta. \quad (10.10)$$

Osserviamo che il trinomio invariante del sistema delle forze centrifughe è nullo (tutte le forze sono parallele), quindi tale sistema è equivalente alla sola risultante  $\vec{\mathbf{R}}$  delle forze centrifughe applicata ad un punto dell'asse centrale. Le coordinate di  $\vec{\mathbf{R}}$  nel riferimento  $Oxy$  sono date da

$$\mathbf{R} = \int_0^{2\ell} \mathbf{f}(\theta; r) dr = \int_0^{2\ell} \lambda \omega^2 r \sin \theta dr \mathbf{e}_1 = m \omega^2 \ell \sin \theta \mathbf{e}_1.$$

Un punto  $Q$  dell'asse centrale è dato dalla relazione

$$Q - O = \frac{1}{|\mathbf{R}|^2} \vec{\mathbf{R}} \times \vec{\mathbf{N}}_O,$$

dove  $\vec{N}_O$  è il momento delle forze centrifughe rispetto all'origine  $O$ . In coordinate nel riferimento  $Oxy$  si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_O &= \int_0^{2\ell} \boldsymbol{\chi}(\theta; r) \times \mathbf{f}(\theta; r) dr = \lambda\omega^2 \int_0^{2\ell} (\boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{e}_1) \boldsymbol{\chi} \times \mathbf{e}_1 dr \\ &= \lambda\omega^2 \int_0^{2\ell} r^2 \sin\theta \cos\theta dr \mathbf{e}_3 = \frac{4}{3} m\omega^2 \ell^2 \sin\theta \cos\theta \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Le coordinate del punto  $Q$  sono quindi

$$\mathbf{x}_Q = -\frac{4}{3} \ell \cos\theta \mathbf{e}_2.$$

In particolare possiamo considerare il punto  $Q'$ , dove l'asse centrale incrocia l'asta, di coordinate

$$\mathbf{x}_{Q'} = \boldsymbol{\chi}_{Q'}(\theta) = \frac{4}{3} \ell (\sin\theta \mathbf{e}_1 - \cos\theta \mathbf{e}_2).$$

**Esercizio 42.** Verificare che nell'Esempio 23 possiamo utilizzare il sistema equivalente  $(\vec{\mathbf{R}}, Q')$  per calcolare  $Q_\theta$ .

Osserviamo anche che il baricentro  $B$  dell'asta, di coordinate

$$\boldsymbol{\chi}_B(\theta) = \ell (\sin\theta \mathbf{e}_1 - \cos\theta \mathbf{e}_2),$$

non è un punto dell'asse centrale e se sostituiamo  $(\vec{\mathbf{R}}, B)$  al sistema di forze centrifughe otteniamo un risultato sbagliato:

$$\mathbf{R} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_B}{\partial \theta} = m\ell^2 \omega^2 \sin\theta \cos\theta.$$

**Esempio 24.** Consideriamo un disco omogeneo di massa  $M$  e raggio  $R$  che può rotolare senza strisciare sull'asse  $Ox$  di un piano  $Oxy$ . Assumiamo che tale piano ruoti uniformemente attorno all'asse  $Oy$  con velocità angolare costante  $\omega \hat{\mathbf{e}}_2$ . Usando come coordinata lagrangiana l'ascissa  $s$  lungo l'asse  $Ox$  del baricentro  $B$  del disco, calcoliamo la componente lagrangiana della forza centrifuga.

La densità di massa del disco è  $\sigma = \frac{M}{\pi R^2}$ . Se  $(r, \theta)$  sono coordinate polari per il disco centrate in  $B$  si ha

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\chi}(s; r, \theta) &= (s + r \cos\theta) \mathbf{e}_1 + (R + r \sin\theta) \mathbf{e}_2, & \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial s}(s; r, \theta) &= \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{f}(s; r, \theta) &= -\sigma\omega^2 \mathbf{e}_2 \times (\mathbf{e}_2 \times \boldsymbol{\chi}) = \sigma\omega^2 (\boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

Si trova che

$$Q_s = \int_0^{2\pi} \int_0^R \mathbf{f}(s; r, \theta) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial s}(s; r, \theta) dr d\theta = \sigma\omega^2 \int_0^{2\pi} \int_0^R (s + r \cos\theta) r dr d\theta = m\omega^2 s.$$

**Esercizio 43.** Dimostrare che nel caso dell'Esempio 24 il baricentro  $B$  del disco appartiene all'asse centrale, quindi possiamo sostituire al sistema di forze centrifughe il sistema  $(\vec{R}, B)$ , dove  $\vec{R}$  è la risultante di tali forze.

## 10.3 Equazioni di Lagrange

**Proposizione 61.** Assumiamo che la mappa  $\mathbf{q} \mapsto \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t)$ , che a ogni istante  $t$  fornisce coordinate locali sulla varietà delle configurazioni  $\mathcal{C}_t$ , sia di classe  $C^2$ . Una curva  $t \mapsto \mathbf{q}(t)$ , parametrizzata col tempo, soddisfa le equazioni del principio di D'Alembert (10.5) se e solo se essa soddisfa<sup>2</sup>

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \frac{\partial T}{\partial q_h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = Q_h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad h = 1, \dots, n. \quad (10.11)$$

Le (10.11) rappresentano una forma delle **equazioni di Lagrange**.

*Dimostrazione.* Le equazioni del principio di D'Alembert si possono scrivere

$$M\ddot{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h} = Q_h, \quad h = 1, \dots, n, \quad (10.12)$$

dove  $\ddot{\mathbf{x}}$  è data da (10.6) ed  $M$  è la matrice delle masse definita in (10.1). Verifichiamo che lungo le curve  $t \mapsto \mathbf{q}(t)$ , rappresentative delle curve  $t \mapsto \mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}(t), t)$ , si ha

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = M\ddot{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}, \quad h = 1, \dots, n. \quad (10.13)$$

Consideriamo l'energia cinetica  $T = \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot M\mathbf{v}$ , con

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{h=1}^n \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t}.$$

Per  $h = 1, \dots, n$  si ha

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_h} \cdot M\mathbf{v} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h} \cdot M\mathbf{v}$$

<sup>2</sup>nell'equazione differenziale (10.11) si intende che

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial^2 T}{\partial q_k \partial \dot{q}_h} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_h} \ddot{q}_k \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial t \partial \dot{q}_h}.$$

poichè

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h},$$

quindi

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h} \cdot M \mathbf{v} + \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h} \cdot M \frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

in cui

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \sum_{h=1}^n \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_h} \ddot{q}_h \right) + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}.$$

Inoltre si ha

$$\frac{\partial T}{\partial q_h} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_h} \cdot M \mathbf{v}.$$

Dalle relazioni

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \boldsymbol{\chi}}{\partial q_k \partial q_h} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \boldsymbol{\chi}}{\partial t \partial q_h}, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_h} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h \partial t}, \end{aligned}$$

scambiando l'ordine di derivazione si ottiene

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_h}, \quad (10.14)$$

per cui

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h} \cdot M \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Si conclude osservando che lungo le curve  $t \mapsto \mathbf{q}(t)$  si ha  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}$  e quindi  $\ddot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ .  $\square$

Osserviamo che le (10.11) si possono scrivere come sistema di equazioni differenziali del primo ordine in forma normale. Infatti, dalla relazione

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}(\mathbf{q}, t) \cdot \dot{\mathbf{q}} + c(\mathbf{q}, t)$$

si ottiene

$$\nabla_{\dot{\mathbf{q}}} T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = A(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}(\mathbf{q}, t),$$

dunque le equazioni di Lagrange si possono scrivere

$$A(\mathbf{q}, t) \ddot{\mathbf{q}} = F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (10.15)$$

con

$$F = \mathbf{Q} + \nabla_{\mathbf{q}} T - \frac{dA}{dt} \dot{\mathbf{q}} - \frac{d\mathbf{b}}{dt},$$

dove

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{q}} T &= \left( \frac{\partial T}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial T}{\partial q_n} \right)^T, & \frac{\partial T}{\partial q_h} &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot \frac{\partial A}{\partial q_h} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial q_h} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial c}{\partial q_h}, \\ \frac{dA}{dt} &= \sum_{h=1}^n \frac{\partial A}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial A}{\partial t}, & \frac{d\mathbf{b}}{dt} &= \sum_{h=1}^n \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Poiché la matrice cinetica  $A$  è invertibile, introducendo la variabile  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  le (10.15) si possono scrivere come sistema del primo ordine in forma normale:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} = A^{-1}(\mathbf{q}, t) F(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t). \end{cases} \quad (10.16)$$

## 10.4 Forze conservative e lagrangiana

**Definizione 33.** In un sistema di equazioni di Lagrange della forma (10.11) le forze generalizzate  $Q_1, \dots, Q_n$  si dicono **conservative** se esiste una funzione  $V = V(\mathbf{q}, t)$  tale che

$$Q_h = -\frac{\partial V}{\partial q_h}, \quad h = 1, \dots, n.$$

La funzione  $V$  si chiama energia potenziale delle forze  $Q_h$ .

Se il sistema di forze  $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_N$  è conservativo con energia potenziale  $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ , cioè si ha

$$\mathbf{F}_j = \mathbf{F}_j(\mathbf{x}), \quad -\nabla_{\mathbf{x}_j} \mathcal{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_j(\mathbf{x}), \quad j = 1, \dots, N,$$

allora possiamo scegliere

$$V(\mathbf{q}, t) = \mathcal{V}(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t)),$$

infatti

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial q_h}(\mathbf{q}, t) &= -\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{V}(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t)) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}(\mathbf{q}, t) = -\sum_{j=1}^N \nabla_{\mathbf{x}_j} \mathcal{V}(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t)) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h}(\mathbf{q}, t) \\ &= \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t)) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h}(\mathbf{q}, t) = Q_h(\mathbf{q}, t). \end{aligned}$$

Nel caso di un sistema lagrangiano conservativo possiamo scrivere le equazioni (10.11) nella forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = 0, \quad (10.17)$$

dove la funzione

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - V(\mathbf{q}, t)$$

si dice **lagrangiana**, o funzione di Lagrange. Infatti in questo caso si ha

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = \frac{\partial V}{\partial q_h},$$

per cui

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(T - V)}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial(T - V)}{\partial q_h} = 0.$$

**Esempio 25.** Consideriamo un sistema meccanico costituito da un disco e da un'asta come nell'Esempio 21. Assumiamo anche che sul sistema agisca la forza di gravità, di accelerazione  $g\mathbf{e}_2$ , ed una molla di costante elastica  $k > 0$  e lunghezza a riposo nulla che collega l'estremo libero  $A$  dell'asta all'asse  $Oy$  mantenendosi sempre parallela ad  $Ox$ .

L'energia potenziale delle forze attive è data da

$$V(s, \varphi) = MgR + mg(R - \ell \cos \varphi) + \frac{1}{2}k(s + 2\ell \sin \varphi)^2.$$

Tenendo conto dell'espressione dell'energia cinetica calcolata in (10.2) e trascurando le costanti additive si ha

$$L = T - V = \left(\frac{3}{4}M + \frac{m}{2}\right)\dot{s}^2 + \frac{2}{3}m\ell^2\dot{\varphi}^2 + m\ell \cos \varphi \dot{s}\dot{\varphi} + mgl \cos \varphi - \frac{1}{2}k(s + 2\ell \sin \varphi)^2,$$

per cui

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} &= \left(\frac{3}{2}M + m\right)\dot{s} + m\ell \cos \varphi \dot{\varphi}, \\ \frac{\partial L}{\partial s} &= -k(s + 2\ell \sin \varphi), \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= \frac{4}{3}m\ell^2\dot{\varphi} + m\ell \cos \varphi \dot{s}, \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -m\ell \sin \varphi \dot{s}\dot{\varphi} - mgl \sin \varphi - 2k(s + 2\ell \sin \varphi)\ell \cos \varphi. \end{aligned}$$

Concludiamo che le equazioni di Lagrange sono

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2}M + m\right)\ddot{s} - m\ell \sin \varphi \dot{\varphi}^2 + m\ell \cos \varphi \ddot{\varphi} + k(s + 2\ell \sin \varphi) &= 0, \\ \frac{4}{3}m\ell^2\ddot{\varphi} + m\ell \cos \varphi \ddot{s} + mgl \sin \varphi + 2k(s + 2\ell \sin \varphi)\ell \cos \varphi &= 0. \end{aligned}$$

## 10.5 Lagrangiane equivalenti

Vale il seguente risultato

**Lemma 3.** Sia  $F(\mathbf{q}, t)$  una funzione di classe  $C^2$  e sia

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Allora si ha

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_h} \left( \frac{dF}{dt} \right) - \frac{\partial}{\partial q_h} \left( \frac{dF}{dt} \right) = 0, \quad h = 1, \dots, n.$$

*Dimostrazione.* Osserviamo che

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_h} \left( \frac{dF}{dt} \right) = \frac{\partial F}{\partial q_h},$$

per cui

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_h} \left( \frac{dF}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial q_h} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial q_k \partial q_h} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_h}.$$

Inoltre

$$\frac{\partial}{\partial q_h} \left( \frac{dF}{dt} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial q_h \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 F}{\partial q_h \partial t}.$$

Si conclude usando la regolarità di  $F$ .

□

Siano  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ ,  $F(\mathbf{q}, t)$  funzioni di classe  $C^2$ . Se definiamo

$$\mathcal{L} = cL + \frac{dF}{dt}, \quad (10.18)$$

con  $c \neq 0$  costante e

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{h=1}^n \dot{q}_h \frac{\partial F}{\partial q_h} + \frac{\partial F}{\partial t},$$

allora, dal Lemma 3 segue che  $L$  e  $\mathcal{L}$  definiscono le stesse equazioni di Lagrange.

**Esercizio 44.** In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento  $Oxz$  con asse  $Oz$  verticale ascendente e si consideri un triangolo rettangolo  $ABC$  di altezza  $h$ , con angolo retto in  $A$  e angolo  $\alpha$  in  $B$ , il cui lato  $AB$  scivola sull'asse  $Ox$  con legge oraria  $A(t) \equiv (s(t), 0)$ , dove  $s \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  è una funzione nota del tempo. Sul triangolo può rotolare senza strisciare un disco omogeneo  $\mathcal{C}$  di massa  $m$  e raggio  $R$ . Sul disco agisce la forza di gravità, di accelerazione  $g$ . Usando come coordinata lagrangiana l'ascissa  $q$  del punto di contatto  $P$  tra disco e triangolo sul lato  $BC$  del triangolo

- i) scrivere la lagrangiana  $L$  del disco relativa al sistema di riferimento  $Oxz$  e la lagrangiana  $L'$  relativa a un sistema solidale al triangolo;
- ii) trovare una funzione  $F(q, t)$  tale che

$$L = L' + \frac{d}{dt}F.$$

## 10.6 Covarianza delle equazioni di Lagrange

Verifichiamo che la forma delle equazioni

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{0}. \quad (10.19)$$

resta la stessa se operiamo un cambiamento di coordinate.

**Proposizione 62.** Consideriamo un sistema lagrangiano definito da una funzione  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ . Sia  $\mathbf{q} \mapsto \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q})$  un cambiamento di variabili di classe  $C^2$ . Allora  $\mathbf{q}(t)$  è una soluzione delle equazioni di Lagrange per  $L$  se e solo se  $\mathbf{Q}(t) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q}(t))$  è una soluzione delle equazioni di Lagrange per

$$\mathcal{L}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) = L\left(\boldsymbol{\varphi}^{-1}(\mathbf{Q}), \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^{-1}}{\partial \mathbf{Q}}(\mathbf{Q})\dot{\mathbf{Q}}, t\right).$$

*Dimostrazione.* Abbiamo che

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_h} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial}{\partial \dot{Q}_h} \left( \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial \varphi_k^{-1}}{\partial Q_\ell} \dot{Q}_\ell \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \varphi_k^{-1}}{\partial Q_h}$$

per cui

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_h} = \sum_{k=1}^n \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \frac{\partial \varphi_k^{-1}}{\partial Q_h} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \left( \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial^2 \varphi_k^{-1}}{\partial Q_\ell \partial Q_h} \dot{Q}_\ell \right).$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_h} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{\partial \varphi_k^{-1}}{\partial Q_h} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial}{\partial Q_h} \left( \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial \varphi_k^{-1}}{\partial Q_\ell} \dot{Q}_\ell \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{\partial \varphi_k^{-1}}{\partial Q_h} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \left( \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial^2 \varphi_k^{-1}}{\partial Q_h \partial Q_\ell} \dot{Q}_\ell \right). \end{aligned}$$

Usando il fatto che  $\varphi^{-1}$  è di classe  $\mathcal{C}^2$  si ottiene

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{Q}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{Q}} = \left( \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right) \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{q}} \right]^{-1} \right) \circ \Phi^{-1},$$

dove

$$\Phi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \left( \varphi(\mathbf{q}), \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, t \right).$$

□

**Esercizio 45.** *Trovare come cambiano la Proposizione 62 nel caso di un cambiamento di coordinate dipendente dal tempo.*

## 10.7 Energia potenziale generalizzata

Diciamo che le componenti lagrangiane delle forze  $Q_h$  ammettono un'energia potenziale generalizzata se esiste una funzione  $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  tale che

$$Q_h = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h}, \quad h = 1, \dots, n. \quad (10.20)$$

Se esiste una tale funzione  $V$ , allora definendo  $L = T - V$  le equazioni di Lagrange (10.11) si possono scrivere nella forma (10.17). Notiamo che, se esiste  $V$  che soddisfa (10.20), allora si ha

$$V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = V_0(\mathbf{q}, t) + V_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (10.21)$$

con  $V_i$  omogenea di grado  $i$  ( $i = 0, 1$ ) nelle  $\dot{\mathbf{q}}$ , infatti per ogni  $h = 1, \dots, n$  si ha

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial \dot{q}_h} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_h} \ddot{q}_k \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} = Q_h.$$

Poiché le forze attive  $\mathbf{F}_j$  agenti sui punti del sistema, che appaiono nelle  $Q_h$ , possono dipendere solo dalle loro posizioni e velocità e dal tempo, si ha necessariamente

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0, \quad h, k = 1, \dots, n. \quad (10.22)$$

Allora, integrando due volte la (10.22), si ottiene

$$V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{q}, t) \cdot \dot{\mathbf{q}} + V_0(\mathbf{q}, t), \quad (10.23)$$

per certe funzioni  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$  e  $V_0$ . Se le componenti lagrangiane  $Q_h$  delle forze ammettono un potenziale generalizzato, allora dalle (10.20), (10.23) si ottiene

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = -\nabla_{\mathbf{q}} V_0(\mathbf{q}, t) + B(\mathbf{q}, t)\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}(\mathbf{q}, t),$$

dove  $B(\mathbf{q}, t)$  è una matrice antisimmetrica con coefficienti

$$B_{hk} = \frac{\partial a_h}{\partial q_k} - \frac{\partial a_k}{\partial q_h},$$

infatti

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial \dot{q}_h} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} = \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial a_h}{\partial q_k} - \frac{\partial a_k}{\partial q_h} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial a_h}{\partial t} - \frac{\partial V_0}{\partial q_h}. \end{aligned}$$

**Proposizione 63.** *Le forze apparenti agenti su un punto materiale  $P$  di massa  $m$  ammettono l'energia potenziale generalizzata*

$$V' = m\vec{\mathbf{a}}_{O'} \cdot (P - O') - \frac{1}{2}m|\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P - O')|^2 - m\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P - O') \cdot \vec{\mathbf{v}}', \quad (10.24)$$

Scrivendo i vettori in coordinate nella base  $\mathcal{B}$  si ha

$$V' = m\mathbf{a}_{O'} \cdot R\mathbf{q} - \frac{1}{2}m|\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{q}|^2 - m\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{q} \cdot R\dot{\mathbf{q}}, \quad (10.25)$$

in cui  $\mathbf{q}$  è il vettore delle coordinate cartesiane di  $P - O'$  nella base  $\mathcal{B}'$  ed  $R = (R_{ij})$  con  $R_{ij} = \hat{\mathbf{e}}'_j \cdot \hat{\mathbf{e}}_i$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo un punto materiale di massa  $m$  che si muove liberamente in  $\mathbb{R}^3$  e sul quale non agiscono forze attive in un riferimento  $\Sigma$ . Prendiamo poi un altro riferimento  $\Sigma'$ . La differenza delle energie cinetiche,  $T'$  nel riferimento  $\Sigma'$  e  $T$  nel riferimento  $\Sigma$ , ci fornisce un'espressione per l'energia potenziale delle forze apparenti che agiscono su un punto materiale di massa  $m$ . Per dimostrarlo basta scrivere le equazioni di Lagrange di prima specie per il punto materiale in  $\Sigma'$  ed in  $\Sigma$ , utilizzando le stesse coordinate lagrangiane. Si ha

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_h} T' - \frac{\partial}{\partial q_h} T' = Q'_h, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_h} T - \frac{\partial}{\partial q_h} T = 0, \quad h = 1, \dots, n,$$

dove  $Q'_h$  sono le componenti lagrangiane delle forze apparenti. Per differenza si ha

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_h} (T' - T) - \frac{\partial}{\partial q_h} (T' - T) = Q'_h \quad h = 1, \dots, n.$$

Notiamo che i termini quadratici nelle velocità lagrangiane  $\dot{\mathbf{q}}$  spariscono, infatti

$$\begin{aligned} T' - T &= \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{q}}|^2 - \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{q} + R\dot{\mathbf{q}}|^2 = \\ &= -\frac{1}{2}m|\mathbf{v}_{O'}|^2 - \frac{1}{2}m|\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{q}|^2 - m\mathbf{v}_{O'} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{q} + R\dot{\mathbf{q}}) - m\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{q} \cdot R\dot{\mathbf{q}} \end{aligned}$$

quindi possiamo scegliere  $V' = T' - T$ .

Utilizziamo adesso il Lemma 3. Il termine  $\frac{1}{2}m|\mathbf{v}_{O'}|^2$  è una funzione nota solo del tempo e può essere tralasciata. Inoltre si ha

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_{O'} \cdot R\mathbf{q}) = \mathbf{a}_{O'} \cdot R\mathbf{q} + \mathbf{v}_{O'} \cdot (\dot{R}\mathbf{q} + R\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{a}_{O'} \cdot R\mathbf{q} + \mathbf{v}_{O'} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{q} + R\dot{\mathbf{q}}),$$

per cui possiamo sostituire

$$-m\mathbf{v}_{O'} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{q} + R\dot{\mathbf{q}})$$

con

$$m\mathbf{a}_{O'} \cdot R\mathbf{q} - m\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_{O'} \cdot R\mathbf{q})$$

e trascurare il secondo termine perché è una derivata totale di una funzione di  $(\mathbf{q}, t)$ . Infatti se

$$\tilde{V} = V + \frac{d}{dt}F,$$

dove  $F = F(\mathbf{q}, t)$ , e si ha

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q},$$

allora vale anche

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}.$$

La dimostrazione è la stessa fatta per le lagrangiane equivalenti nella Sezione 10.5.  $\square$

**Osservazione 43.** *In generale, nelle (10.24), (10.25) non si riesce a distinguere tra i termini relativi alle forze di trascinamento e quelli della forza di Coriolis.*

**Proposizione 64.** *Nel caso particolare in cui  $\vec{\omega}$  è costante possiamo definire separatamente un'energia potenziale per le forze di trascinamento  $-m\vec{a}_{O'}$ ,  $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (P - O'))$ , e per la forza di Coriolis  $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$ .*

*Dimostrazione.* Consideriamo un punto materiale di massa  $m$  con posizione  $P-O'$ , velocità  $\vec{v}'$  e accelerazione  $\vec{a}'$  relative a  $\Sigma'$ , rappresentate dai vettori  $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^3$  nella base  $\mathcal{B}'$ . Sia inoltre  $\boldsymbol{\omega}$  il vettore delle coordinate della velocità angolare in  $\mathcal{B}$ .

Usiamo il risultato seguente

**Lemma 4.** Se  $\boldsymbol{\omega}$  è costante, esiste una matrice costante di rotazione  $R_0$  tale che

$$R_0 R^T \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}, \quad (10.26)$$

dove  $R = R(t)$  è la matrice di cambiamento di base da  $\mathcal{B}'$  a  $\mathcal{B}$ .

*Dimostrazione.* Se il vettore  $\vec{\boldsymbol{\omega}}$  è costante in  $\Sigma$  allora è costante anche in  $\Sigma'$ . Scegliamo  $R_0 = R(0)$ . Consideriamo il sistema di riferimento  $\Sigma'' = O' \hat{e}_1'' \hat{e}_2'' \hat{e}_3''$ , i cui versori  $\hat{e}_h''$  sono rappresentati in  $\mathcal{B}$  da

$$\mathbf{e}_h''(t) = R_0^T \mathbf{e}_h'(t), \quad h = 1, 2, 3.$$

Poiché vale  $\mathbf{e}_h'(0) = R_0 \mathbf{e}_h$ , si ha  $\mathbf{e}_h''(0) = \mathbf{e}_h$  per  $h = 1, 2, 3$ .

Il vettore  $\vec{\boldsymbol{\omega}}$  è anche la velocità angolare di  $\Sigma''$  rispetto a  $\Sigma$ , quindi  $\vec{\boldsymbol{\omega}}$  è costante anche in  $\Sigma''$ . Le coordinate  $\boldsymbol{\omega}''$  di  $\vec{\boldsymbol{\omega}}$  nella base  $\mathcal{B}''$  sono date da  $R_0 R^T \boldsymbol{\omega}$ ; si ha dunque

$$\frac{d}{dt}(R_0 R^T \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{0}, \quad R_0 R^T(0) \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega},$$

da cui segue la (10.26). □

Nel seguito assumeremo per semplicità che  $R_0 = I$ , cioè che al tempo  $t = 0$  l'orientazione del riferimento  $\Sigma'$  coincida con quella di  $\Sigma$ . In questa ipotesi, la (10.26) si può scrivere come

$$R \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}. \quad (10.27)$$

Siano  $\mathbf{q}$  le coordinate cartesiane di  $P$  in  $\Sigma'$ . Per ciascun termine  $\mathbf{F}$  delle forze apparenti cerchiamo una funzione  $V$  tale che

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} = Q_h = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}, \quad (10.28)$$

con<sup>3</sup>

$$\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t) = R(t) \mathbf{q},$$

per cui

$$\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h} = R \mathbf{e}_h = \mathbf{e}_h',$$

e la (10.28) diventa

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_h'.$$

Quindi al membro destro delle (10.28) dobbiamo ottenere le componenti delle forze apparenti nella base  $\mathcal{B}'$ .

<sup>3</sup> $\boldsymbol{\chi}$  rappresenta il vettore  $P - O'$  nella base  $\mathcal{B}$ .

La forza di trascinamento dovuta al moto di  $O'$  è

$$\mathbf{F}_{tr} = -m\ddot{\mathbf{x}}_{O'}.$$

Tale forza ammette l'energia potenziale

$$V_{tr}(\mathbf{q}, t) = m\ddot{\mathbf{x}}_{O'} \cdot R\mathbf{q}, \quad (10.29)$$

infatti

$$-\frac{\partial}{\partial q_h} V_{tr} = -m\ddot{\mathbf{x}}_{O'} \cdot R\mathbf{e}_h = \mathbf{F}_{tr} \cdot \mathbf{e}'_h.$$

La forza centrifuga è

$$\mathbf{F}_{centr} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{q}).$$

Tale forza ammette l'energia potenziale

$$V_{centr}(\mathbf{q}, t) = -\frac{1}{2}m|\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{q}|^2 = -\frac{1}{2}m|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}|^2, \quad (10.30)$$

in cui abbiamo usato (10.27) ed il fatto che  $R$  è un'isometria. Infatti

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V_{centr}}{\partial q_h} &= m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_h = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_h = \\ &= -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{q}) \cdot R\mathbf{e}_h = \mathbf{F}_{centr} \cdot \mathbf{e}'_h. \end{aligned}$$

La forza di Coriolis è

$$\mathbf{F}_{Cor} = -2m\boldsymbol{\omega} \times R\dot{\mathbf{q}}.$$

Tale forza ammette l'energia potenziale generalizzata

$$V_{Cor}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = m\boldsymbol{\omega} \times R\dot{\mathbf{q}} \cdot R\mathbf{q} = m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{q}. \quad (10.31)$$

Infatti

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{Cor}}{\partial q_h} &= m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{e}_h = m\boldsymbol{\omega} \times R\dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{e}'_h, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial V_{Cor}}{\partial \dot{q}_h} &= m \frac{d}{dt} (\mathbf{q} \times \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_h) = \\ &= m\dot{\mathbf{q}} \times \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_h = -m\boldsymbol{\omega} \times R\dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{e}'_h, \end{aligned}$$

per cui

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial V_{Cor}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V_{Cor}}{\partial q_h} = -2m\boldsymbol{\omega} \times R\dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{e}'_h = \mathbf{F}_{Cor} \cdot \mathbf{e}'_h.$$

□

**Osservazione 44.** *Dalle espressioni a destra nelle (10.30), (10.31) si vede che in realtà queste energie potenziali non dipendono dal tempo.*

Consideriamo un sistema di  $N$  punti materiali  $P_1, \dots, P_N$  e assumiamo che su di essi agiscano delle forze  $\mathbf{F}_j(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$  che ammettono un'energia potenziale generalizzata, cioè che esista una funzione  $\mathcal{V}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$  tale che

$$\frac{d}{dt}(\nabla_{\dot{\mathbf{x}}_j} \mathcal{V}) - \nabla_{\mathbf{x}_j} \mathcal{V} = \mathbf{F}_j, \quad j = 1, \dots, N.$$

Se il sistema di punti è soggetto a vincoli olonomi con varietà delle configurazioni  $\mathcal{C}_t$  e a ogni istante  $t$  la mappa

$$\mathbf{q} \mapsto \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t)$$

rappresenta una parametrizzazione locale di  $\mathcal{C}_t$ , allora la funzione

$$V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathcal{V}(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t), \mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), t)$$

è un'energia potenziale generalizzata per le forze agenti sul sistema vincolato, infatti per  $h = 1, \dots, n$  si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} &= \frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{\mathbf{x}}} \mathcal{V}) \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_h} + \nabla_{\dot{\mathbf{x}}} \mathcal{V} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_h} \right) - \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{V} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h} - \nabla_{\dot{\mathbf{x}}} \mathcal{V} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_h} \\ &= \left[ \frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{\mathbf{x}}} \mathcal{V}) - \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{V} \right] \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h} + \nabla_{\dot{\mathbf{x}}} \mathcal{V} \cdot \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h} \right) - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_h} \right] \\ &= \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t), \mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), t) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h} = Q_h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \end{aligned}$$

dove abbiamo usato le relazioni

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h} \right) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_h}.$$

**Esempio 26.** Calcoliamo l'energia potenziale della forza centrifuga per il sistema dell'Esempio 23. Si ha

$$V(\theta) = \int_0^{2\ell} -\frac{1}{2} \lambda |\omega \mathbf{e}_2 \times \boldsymbol{\chi}|^2 dr,$$

dove

$$\lambda = \frac{m}{2\ell}, \quad \boldsymbol{\chi}(\theta; r) = 2r(\sin \theta \mathbf{e}_1 - \cos \theta \mathbf{e}_2), \quad r \in [0, 2\ell],$$

sono rispettivamente la densità di massa dell'asta ed il vettore delle coordinate di un generico punto dell'asta. Quindi

$$V(\theta) = -\frac{1}{2} \lambda \omega^2 \int_0^{2\ell} r^2 \sin^2 \theta dr = -\frac{2}{3} m \omega^2 \ell^2 \sin^2 \theta.$$

Si verifica facilmente che

$$-\frac{\partial V}{\partial \theta} = Q_\theta,$$

in cui la forza generalizzata  $Q_\theta$  è data dalla (10.10).

**Esempio 27.** (*Problema dei tre corpi ristretto circolare piano in un sistema di riferimento ruotante*) Consideriamo un punto materiale  $P$  di massa  $\mu$  che si muove in un piano sotto l'azione della forza di attrazione gravitazionale prodotta da due punti materiali  $P_1, P_2$  di masse  $m_1, m_2$  molto più grandi di  $\mu$ . Assumiamo che il moto di  $P_1$  e  $P_2$  non sia influenzato dalla presenza di  $P$  e che questi punti si muovano nello stesso piano di  $P$  su orbite circolari, soluzioni del problema dei due corpi, centrate nel loro baricentro  $O$ . Consideriamo un riferimento  $\Sigma = Oxyz$ , dove  $Oxy$  è il piano del moto dei punti considerati. Sia  $d$  la distanza  $|P_1 - P_2|$  e  $G$  la costante gravitazionale di Newton. Possiamo scegliere le unità di misura in modo che

$$d = 1, \quad m_1 + m_2 = 1, \quad G = 1.$$

Poniamo  $m = m_2$  e consideriamo un riferimento  $\Sigma' = O\xi\eta\zeta$ , che si muove rispetto a  $\Sigma$  in modo che  $O\zeta = Oz$  e la direzione del vettore  $P_2 - P_1$  corrisponda a quella dell'asse  $O\xi$  (vedi figura). La velocità angolare di  $\Sigma'$  rispetto a  $\Sigma$  è  $\vec{\omega} = \omega \hat{e}_3$ , con  $\hat{e}_3$  perpendicolare al piano del moto, e con le unità di misura scelte si ha<sup>4</sup>

$$\omega = 1.$$

Inoltre, usando l'integrale del centro di massa, si ha

$$|P_1 - O| = m, \quad |P_2 - O| = 1 - m.$$

Siano  $\mathbf{q} = (\xi, \eta, 0)$  le coordinate del punto  $P$  nel riferimento  $\Sigma'$ . L'energia potenziale per unità di massa  $\mu$  delle forze che agiscono su  $P$  è

$$\begin{aligned} V &= -\frac{(1-m)}{|P-P_1|} - \frac{m}{|P-P_2|} - \frac{1}{2}|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}|^2 - \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}} \\ &= -\frac{(1-m)}{\sqrt{(\xi+m)^2 + \eta^2}} - \frac{m}{\sqrt{(\xi-1+m)^2 + \eta^2}} - \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) - (\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}). \end{aligned}$$

## 10.8 Funzione di dissipazione di Rayleigh

Dato un sistema di  $N$  punti materiali dividiamo le forze attive in due categorie, quelle che ammettono un'energia potenziale generalizzata  $V$  e quelle che non la

<sup>4</sup>per dimostrarlo basta usare la terza legge di Keplero.

ammettono. Possiamo scrivere le equazioni di Lagrange nella forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = Q_h, \quad h = 1, \dots, n \quad (10.32)$$

dove  $L = T - V$  e  $Q_h$  sono le componenti lagrangiane delle forze che non ammettono energia potenziale. Se le  $Q_h$  sono prodotte da forze dissipative della forma

$$\vec{F}_j = -k\vec{v}_j, \quad j = 1, \dots, N$$

dove  $\vec{v}_j$  sono le velocità dei punti  $P_j$ , consideriamo la funzione

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2}k \sum_{j=1}^N |\vec{v}_j|^2$$

e la funzione composta

$$\mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathbf{v}, \quad (10.33)$$

dove  $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N)$  e  $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  sono le velocità dei punti del sistema in funzione delle posizioni e velocità lagrangiane.

Osserviamo che si ha

$$\mathbf{F}_j = -\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{v}_j},$$

per cui le forze generalizzate si scrivono

$$Q_h = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j \frac{\partial \chi_j}{\partial q_h} = -\sum_{j=1}^N \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{v}_j} \frac{\partial \chi_j}{\partial q_h} = -\sum_{j=1}^N \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{v}_j} \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial \dot{q}_h} = -\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_h}.$$

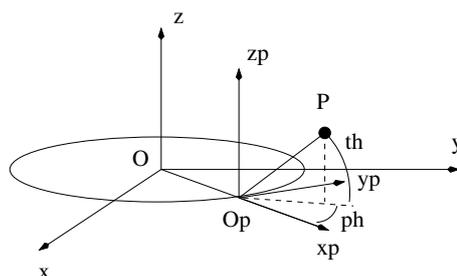
In questo caso le (10.32) diventano

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_h} = 0, \quad h = 1, \dots, n.$$

La funzione  $\mathcal{R}$  si chiama **funzione di dissipazione di Rayleigh**.

## 10.9 Esercizi

**Esercizio 46.** Si fissi un sistema di riferimento  $\Sigma = Oxyz$  con asse  $Oz$  verticale ascendente e si consideri un riferimento  $\Sigma' = O'x'y'z'$  con  $O'$  che si muove di moto circolare uniforme nel piano  $Oxy$  con legge oraria  $x_{O'} = r \cos(\omega t)$ ,  $y_{O'} = r \sin(\omega t)$ ,  $z_{O'} = 0$ ,  $\omega \neq 0$  costante. L'asse  $O'z'$  è sempre parallelo a  $Oz$  e l'asse  $O'x'$  è orientato come  $O' - O$  (vedi figura). Nel riferimento  $\Sigma'$  si consideri un pendolo



sferico formato da un punto materiale  $P$  di massa  $m$  sospeso ad  $O'$  tramite un'asta di lunghezza  $l$  e massa trascurabile. Sul pendolo agisce la forza di gravità, di accelerazione  $g$ . Si usino come coordinate lagrangiane l'angolo  $\theta$  che  $P-O'$  forma col piano  $O'x'y'$  e l'angolo  $\varphi$  che la proiezione di  $P-O'$  su  $O'x'y'$  forma con l'asse  $O'x'$ .

- (i) Scrivere l'energia potenziale generalizzata delle forze apparenti che agiscono su  $P$  nel riferimento  $\Sigma'$ ;
- (ii) scrivere la lagrangiana del sistema.

**Esercizio 47.** Si fissi in  $\mathbb{R}^3$  un sistema di riferimento inerziale  $\Sigma = Oxyz$ . Un punto materiale  $P$  di massa  $m$  può muoversi su una superficie sferica liscia  $\mathcal{S}$  di raggio  $R$  che ruota attorno all'asse  $Oz$  con velocità angolare costante  $\vec{\omega} = \omega \mathbf{e}_3$ . Si consideri il riferimento  $\Sigma' = O'x'y'z'$ , solidale a  $\mathcal{S}$ , con  $Oz' \equiv Oz$ . Trascurando la forza di gravità si studi il moto di  $P$  nel riferimento  $\Sigma'$  usando le coordinate  $(\theta, \varphi) \in (-\pi/2, \pi/2) \times S^1$  definite da

$$x' = R \cos \theta \cos \varphi, \quad y' = R \cos \theta \sin \varphi, \quad z' = R \sin \theta.$$

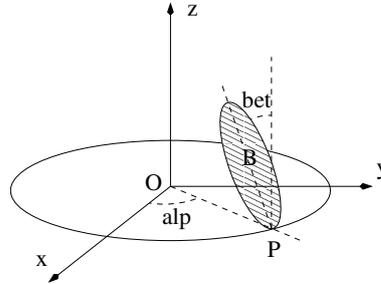
In particolare:

- i) si scriva l'espressione delle forze generalizzate  $Q_\theta, Q_\varphi$  relative alle forze apparenti;
- ii) si trovi l'energia potenziale generalizzata delle forze apparenti;<sup>5</sup>
- iii) si scrivano le equazioni di Lagrange del moto del punto.

**Esercizio 48.** Si fissi un sistema di riferimento  $Oxyz$  con asse  $Oz$  verticale ascendente e si consideri il sistema meccanico descritto in figura composto da un disco

<sup>5</sup>si ricordi che se il punto  $P$  si muove liberamente in  $\mathbb{R}^3$  l'energia potenziale della forza di Coriolis è  $m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{q}$ , con  $\mathbf{q} = (x', y', z')$ ,  $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$ .

omogeneo di massa  $m$  e raggio  $r$  che rotola senza strisciare su una guida circolare di raggio  $R = 2r$  centrata in  $O$  e giacente nel piano  $Oxy$ . Il disco si può inclinare durante il suo moto, ma la retta tangente alla guida nel punto di contatto col disco resta sempre nel piano del disco. Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione  $g$ .



Chiamiamo  $B$  il baricentro del disco e  $P$  il punto di contatto fra disco e guida. Usando come coordinate l'angolo  $\alpha$  che il segmento  $OP$  forma con l'asse  $Ox$  e l'angolo  $\beta$  che il segmento  $PB$  forma con la direzione verticale,

- (i) scrivere la velocità angolare del disco;
- (ii) scrivere la lagrangiana del sistema e le equazioni di Lagrange.

# Capitolo 11

## Simmetrie e integrali primi

Studiamo la relazione tra l'invarianza di una lagrangiana per una famiglia ad un parametro di trasformazioni e l'esistenza di integrali primi del sistema di equazioni di Lagrange associato.

### 11.1 Variabili cicliche

Consideriamo il sistema lagrangiano

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = 0, \quad h = 1, \dots, n \quad (11.1)$$

definito da una funzione di Lagrange  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  di classe  $C^2$ .

**Definizione 34.** *Se la coordinata  $q_k$  non appare esplicitamente nell'espressione di  $L$  allora si dice che  $q_k$  è **ciclica**, o **ignorabile**.*

**Definizione 35.** *Chiamiamo **momento coniugato** alla coordinata  $q_k$  la quantità*

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (11.2)$$

**Proposizione 65.** *Se la variabile  $q_k$  è ciclica in  $L$ , allora il corrispondente momento coniugato  $p_k$  definito da (11.2) è un integrale primo.*

*Dimostrazione.* Segue immediatamente da (11.1). □

Chiaramente la proprietà di avere una o più coordinate cicliche dipende dalla scelta delle coordinate, quindi non è una proprietà intrinseca del sistema lagrangiano considerato.

Anche quando la variabile temporale  $t$  non appare esplicitamente in  $L$  abbiamo una legge di conservazione. Vale infatti la seguente

**Proposizione 66.** (*Integrale di Jacobi*) Se la lagrangiana  $L$  non dipende da  $t$  allora la funzione

$$J(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} L \cdot \dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (11.3)$$

è un integrale primo del sistema lagrangiano (11.1).

*Dimostrazione.*

$$\frac{dJ}{dt} = \sum_{h=1}^n \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \ddot{q}_h \right) - \sum_{h=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \ddot{q}_h \right) = 0$$

lungo le soluzioni di (11.1). □

Osserviamo che se la lagrangiana  $L$  è della forma

$$L_2 + L_1 + L_0$$

con  $L_j$  funzione omogenea di grado  $j$  in  $\dot{\mathbf{q}}$ , allora

$$J = L_2 - L_0.$$

Infatti, per il teorema di Eulero sulle funzioni omogenee si ha

$$\nabla_{\dot{\mathbf{q}}} L_j \cdot \dot{\mathbf{q}} = j L_j, \quad j = 0, 1, 2.$$

### 11.1.1 Riduzione di Routh

Assumiamo che  $L = L(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{y}}, t)$  con  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_s)$ ,  $1 \leq s < n$  un vettore di variabili cicliche e supponiamo che la matrice  $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\mathbf{q}}^2}$  sia definita positiva. Consideriamo la soluzione

$$t \mapsto \mathbf{q}(t) = (\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)) \quad (11.4)$$

del sistema di equazioni di Lagrange definito da  $L$ , con condizioni iniziali

$$\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \dot{\mathbf{x}}_0, \dot{\mathbf{y}}_0 \quad (11.5)$$

per  $t = 0$ . Sia

$$\mathbf{c} = \nabla_{\dot{\mathbf{x}}} L(\mathbf{y}_0, \dot{\mathbf{x}}_0, \dot{\mathbf{y}}_0, 0)$$

il valore del momento coniugato a  $\mathbf{x}$ , costante lungo la soluzione  $\mathbf{q}(t)$ , e sia

$$\mathbf{v}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t, \mathbf{c})$$

la funzione definita implicitamente dalla relazione

$$\nabla_{\dot{\mathbf{x}}} L(\mathbf{y}, \mathbf{v}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t, \mathbf{c}), \dot{\mathbf{y}}, t) = \mathbf{c}. \quad (11.6)$$

Osserviamo che si può applicare il teorema delle funzioni implicite alla (11.6) poiché vale la relazione

$$\det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\mathbf{x}}^2} \neq 0, \quad (11.7)$$

infatti la matrice  $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\mathbf{x}}^2}$  è definita positiva poiché è un minore principale di  $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\mathbf{q}}^2}$ , che è definita positiva. In queste ipotesi vale la seguente:

**Proposizione 67.** *La componente  $\mathbf{y}(t)$  della soluzione (11.4) delle equazioni di Lagrange per  $L$  con condizioni iniziali (11.5) è la soluzione delle equazioni di Lagrange definite dalla funzione*

$$L_R^{(c)}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) = \left[ L(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{y}}, t) - \mathbf{c} \cdot \dot{\mathbf{x}} \right] \Big|_{\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{v}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t, \mathbf{c})}$$

con condizioni iniziali

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \quad \dot{\mathbf{y}}(0) = \dot{\mathbf{y}}_0$$

e la componente  $\mathbf{x}(t)$  di (11.4) è definita da

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{v}(\mathbf{y}(\tau), \dot{\mathbf{y}}(\tau), \tau, \mathbf{c}) d\tau. \quad (11.8)$$

*Dimostrazione.* Per la regola di derivazione di funzioni composte abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_R^{(c)}}{\partial \dot{y}_h}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) &= \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_h}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{y}}, t) + \left( \nabla_{\dot{\mathbf{x}}} L(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{y}}, t) - \mathbf{c} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{y}_h}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t, \mathbf{c}) \right] \Big|_{\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{v}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t, \mathbf{c})} \\ &= \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_h}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{y}}, t) \right] \Big|_{\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{v}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t, \mathbf{c})} \end{aligned}$$

lungo la componente  $\mathbf{y}(t)$  della soluzione  $\mathbf{q}(t)$ . Analogamente lungo  $\mathbf{y}(t)$  abbiamo

$$\frac{\partial L_R^{(c)}}{\partial y_h}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) = \left[ \frac{\partial L}{\partial y_h}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{y}}, t) \right] \Big|_{\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{v}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t, \mathbf{c})}.$$

Quindi la mappa  $t \rightarrow \mathbf{y}(t)$ , che è soluzione di

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{y}}}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{y}}, t) \Big|_{\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{v}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t, \mathbf{c})} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{y}}, t) \Big|_{\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{v}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t, \mathbf{c})} = \mathbf{0},$$

risolve le equazioni di Lagrange per  $L_R^{(c)}$ . L'equazione (11.8) si ottiene immediatamente integrando la relazione

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{y}(t), \dot{\mathbf{y}}(t), t, \mathbf{c}).$$

□

**Definizione 36.** La funzione  $L_R^{(c)}$  della Proposizione 67 è detta **lagrangiana ridotta**, oppure **funzione di Routh**.

**Osservazione 45.** Se  $L = L_2 + L_1 + L_0$ , con  $L_j$  omogenea di grado  $j$  in  $\dot{\mathbf{x}}$ , allora per il teorema di Eulero sulle funzioni omogenee si ha

$$L_R^{(c)} = [-L_2 + L_0]|_{\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{v}(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}},t,c)}.$$

**Esempio 28.** (moto centrale piano) Usando coordinate polari  $\rho, \theta$  la lagrangiana si scrive

$$L(\rho, \theta, \dot{\rho}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2) - V(\rho),$$

quindi la variabile  $\theta$  è ciclica e il suo momento coniugato

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\rho^2\dot{\theta}$$

è un integrale primo. Sia  $c$  il valore di tale integrale in corrispondenza alle condizioni iniziali

$$\rho_0, \theta_0, \dot{\rho}_0, \dot{\theta}_0$$

assegnate al tempo  $t = 0$ . La lagrangiana ridotta è

$$L_R^{(c)}(\rho, \dot{\rho}) = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 - V(\rho) - \frac{c^2}{2m\rho^2}.$$

Introducendo l'energia potenziale efficace

$$V_R^{(c)}(\rho) = V(\rho) + \frac{c^2}{2m\rho^2}$$

e usando la Proposizione 66 si ottiene che il sistema lagrangiano a un grado di libertà definito da  $L_R^{(c)}$  ha l'integrale primo

$$J_R^{(c)}(\rho, \dot{\rho}) = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + V_R^{(c)}(\rho),$$

che corrisponde all'integrale di Jacobi del sistema a due gradi di libertà ristretto al vincolo dato da  $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}(\rho, \dot{\rho}, \dot{\theta}) = c$ :

$$J_R^{(c)}(\rho, \dot{\rho}) = J\left(\rho, \dot{\rho}, \frac{c}{m\rho^2}\right)$$

**Esempio 29.** (coordinate jacobiane nel piano) Consideriamo tre punti di massa unitaria che si muovono nel piano sotto l'azione di forze elastiche, con energia potenziale

$$\mathcal{V}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \frac{k}{2}(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^2 + |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3|^2 + |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3|^2),$$

dove  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \in \mathbb{R}^2$  sono le coordinate cartesiane dei tre punti e  $k > 0$  è una costante. Mostriamo che nelle coordinate  $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}$ , definite dalle relazioni

$$\boldsymbol{\xi} = \frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3}{3}, \quad \boldsymbol{\eta} = \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2, \quad \boldsymbol{\zeta} = \mathbf{x}_1 - \frac{\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3}{2}, \quad (11.9)$$

la lagrangiana del sistema non dipende dalle due componenti di  $\boldsymbol{\xi}$ . Infatti, detta

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \mapsto (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}) = \Phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3),$$

la trasformazione di coordinate definita in (11.9), la sua inversa ha componenti

$$\mathbf{x}_1 = \boldsymbol{\xi} + \frac{2}{3}\boldsymbol{\zeta}, \quad \mathbf{x}_2 = \boldsymbol{\xi} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\eta} - \frac{1}{3}\boldsymbol{\zeta}, \quad \mathbf{x}_3 = \boldsymbol{\xi} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\eta} - \frac{1}{3}\boldsymbol{\zeta}, \quad (11.10)$$

quindi l'energia potenziale  $V = \mathcal{V} \circ \Phi^{-1}$  nelle nuove coordinate si scrive

$$V(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}) = \frac{k}{2} \left( \left| \boldsymbol{\zeta} + \frac{\boldsymbol{\eta}}{2} \right|^2 + \left| \boldsymbol{\zeta} - \frac{\boldsymbol{\eta}}{2} \right|^2 + |\boldsymbol{\eta}|^2 \right).$$

Inoltre, usando la trasformazione corrispondente a (11.9) per i vettori velocità  $\dot{\boldsymbol{\xi}}, \dot{\boldsymbol{\eta}}, \dot{\boldsymbol{\zeta}}$ , possiamo scrivere l'energia cinetica come segue:

$$T = \frac{1}{2} (|\dot{\mathbf{x}}_1|^2 + |\dot{\mathbf{x}}_2|^2 + |\dot{\mathbf{x}}_3|^2) = \frac{1}{2} \left( 3|\dot{\boldsymbol{\xi}}|^2 + \frac{1}{2}|\dot{\boldsymbol{\eta}}|^2 + \frac{2}{3}|\dot{\boldsymbol{\zeta}}|^2 \right).$$

Osserviamo che la lagrangiana  $L = T - V$  non dipende dal vettore  $\boldsymbol{\xi}$ . Possiamo quindi applicare il metodo di Routh. Sia  $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$  il vettore dei valori dei momenti

$$p_{\xi_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_1} = 3\dot{\xi}_1, \quad p_{\xi_2} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_2} = 3\dot{\xi}_2.$$

La lagrangiana ridotta è

$$L_R^c = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2}|\dot{\boldsymbol{\eta}}|^2 + \frac{2}{3}|\dot{\boldsymbol{\zeta}}|^2 \right) - \frac{k}{2} \left( \left| \boldsymbol{\zeta} + \frac{\boldsymbol{\eta}}{2} \right|^2 + \left| \boldsymbol{\zeta} - \frac{\boldsymbol{\eta}}{2} \right|^2 + |\boldsymbol{\eta}|^2 \right) - \frac{|\mathbf{c}|^2}{6}.$$

## 11.2 La trottola di Lagrange

Consideriamo un rotatore simmetrico omogeneo di massa  $m$  con un punto fisso  $O$ , diverso dal suo baricentro  $B$ . Usando la notazione del Capitolo 6 assumiamo che i momenti principali di inerzia soddisfino le relazioni  $I_1 = I_2 \neq I_3$ .<sup>1</sup> Ricordiamo

<sup>1</sup>Questa discussione vale più in generale nel caso di un corpo rigido non omogeneo, con  $I_1 = I_2 \neq I_3$  e con il baricentro sull'asse principale relativo a  $I_3$ .

che la velocità angolare del rotatore in termini degli angoli di Eulero  $\varphi, \theta, \psi$  e delle loro derivate è data da

$$\vec{\omega} = (\dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi) \hat{e}'_1 + (\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi) \hat{e}'_2 + (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \hat{e}'_3.$$

Detta  $\ell$  la distanza del baricentro  $B$  dal punto fisso  $O$  l'energia cinetica  $T$  e l'energia potenziale della forza peso  $V$  sono date da

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathfrak{I}_O \vec{\omega} = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2,$$

$$V = mgl \cos \theta.$$

Osserviamo che le coordinate  $\varphi, \psi$  sono cicliche nella lagrangiana  $L = T - V$ . In corrispondenza abbiamo gli integrali primi

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \cos \theta,$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta).$$

**Osservazione 46.** I momenti coniugati  $p_\varphi, p_\psi$  corrispondono rispettivamente alle proiezioni del momento angolare totale  $\vec{M}_O$  su  $\hat{e}_3$  ed  $\hat{e}'_3$ . Infatti, se  $I_0, \omega$  rappresentano  $\mathfrak{I}_O, \vec{\omega}$  nella base principale  $\mathcal{B}'$ , si ha

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial \omega}{\partial \dot{\varphi}} \cdot I_O \omega, \quad p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial \omega}{\partial \dot{\psi}} \cdot I_O \omega,$$

e si ha

$$\frac{\partial \omega}{\partial \dot{\varphi}} = (\sin \theta \sin \psi, \sin \theta \cos \psi, \cos \theta)^T, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \dot{\psi}} = (0, 0, 1)^T.$$

Usando le formule (6.23), (6.22) si vede che  $\frac{\partial \omega}{\partial \dot{\varphi}}$  rappresenta  $\hat{e}_3$  in  $\mathcal{B}'$ .

I momenti  $p_\varphi, p_\psi$  si conservano perchè il momento risultante delle forze esterne  $\vec{N}_O$  è diretto come la linea dei nodi, che è ortogonale sia a  $\hat{e}_3$  che a  $\hat{e}'_3$ . Più precisamente si ha

$$\vec{N}_O = \ell \hat{e}'_3 \times (-mg \hat{e}_3) = mgl \sin \theta \hat{e}_N.$$

Oltre a  $p_\varphi, p_\psi$  si conserva anche l'energia totale  $E = T + V$ , infatti  $L$  non dipende dal tempo e l'integrale di Jacobi in questo caso corrisponde all'energia  $E$ .

Mostriamo che il problema si può integrare a meno di inversioni e quadrature, cioè che è integrabile secondo Liouville. Scriviamo la lagrangiana ridotta secondo il metodo di Routh per valori costanti  $c_\varphi, c_\psi$  degli integrali  $p_\varphi, p_\psi$ . Abbiamo

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{I_1 \sin^2 \theta} (c_\varphi - c_\psi \cos \theta) =: v_\varphi(\theta, \dot{\theta}, c_\psi, c_\varphi),$$

$$\dot{\psi} = \frac{c_\psi}{I_3} - \frac{\cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} (c_\varphi - c_\psi \cos \theta) =: v_\psi(\theta, \dot{\theta}, c_\psi, c_\varphi),$$

quindi

$$\begin{aligned} L_R^{(c_\varphi, c_\psi)}(\theta, \dot{\theta}) &= \left[ L(\theta, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}) - c_\varphi \dot{\varphi} - c_\psi \dot{\psi} \right] \Big|_{\dot{\varphi}=v_\varphi, \dot{\psi}=v_\psi} = \\ &= \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} \frac{(c_\varphi - c_\psi \cos \theta)^2}{I_1 \sin^2 \theta} - mg\ell \cos \theta - \frac{1}{2} \frac{c_\psi^2}{I_3}. \end{aligned}$$

Le equazioni di Lagrange per  $L_R^{(c_\varphi, c_\psi)}$  corrispondono alle equazioni del moto unidimensionale

$$I_1 \ddot{\theta} = -\frac{d}{d\theta} V_R^{(c_\varphi, c_\psi)}(\theta) \quad (11.11)$$

con

$$V_R^{(c_\varphi, c_\psi)}(\theta) = \frac{1}{2} \frac{(c_\varphi - c_\psi \cos \theta)^2}{I_1 \sin^2 \theta} + mg\ell \cos \theta,$$

per cui il problema è integrabile secondo Liouville.

Siccome  $L_R^{(c_\varphi, c_\psi)}$  non dipende esplicitamente da  $t$ , l'equazione differenziale (11.11) ha l'integrale primo

$$E_R^{(c_\varphi, c_\psi)}(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + V_R^{(c_\varphi, c_\psi)}(\theta).$$

**Osservazione 47.** La conservazione di  $E_R^{(c_\varphi, c_\psi)}$  corrisponde alla conservazione dell'energia totale  $E$  sugli insiemi di livello  $p_\varphi = c_\varphi$ ,  $p_\psi = c_\psi$  (verificarlo!).

Mostriamo che nel piano delle fasi ridotto  $(\theta, \dot{\theta})$  c'è un unico equilibrio e tutte le orbite sono periodiche. Sia  $e$  il valore dell'energia  $E_R^{(c_\varphi, c_\psi)}$  corrispondente alle condizioni iniziali. Dalla relazione  $E_R^{(c_\varphi, c_\psi)}(\theta, \dot{\theta}) = e$ , moltiplicando per  $\frac{2}{I_1} \sin^2 \theta$ , si ottiene

$$\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + \frac{(c_\varphi - c_\psi \cos \theta)^2}{I_1^2} + 2 \frac{mg\ell}{I_1} \cos \theta \sin^2 \theta = 2 \frac{e}{I_1} \sin^2 \theta.$$

Poniamo per semplicità

$$a = \frac{c_\psi}{I_1}, \quad b = \frac{c_\varphi}{I_1}, \quad \alpha = 2 \frac{e}{I_1}, \quad \beta = 2 \frac{mg\ell}{I_1}.$$

L'angolo di nutazione  $\theta$  varia nell'intervallo  $[0, \pi]$ . Usando la variabile

$$u = \cos \theta \in [-1, 1],$$

per cui  $\dot{u}^2 = \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta$ , si ottiene l'equazione differenziale

$$\dot{u}^2 = (1 - u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2.$$

Di seguito ricaviamo alcuni aspetti qualitativi del moto. Gli zeri del polinomio

$$f(u) = (1 - u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2$$

corrispondono a valori di inversione del moto di  $\theta$ . Abbiamo che

$$f(-1) = -(b + a)^2 \leq 0, \quad f(1) = -(b - a)^2 \leq 0.$$

Consideriamo il caso generico in cui  $b \neq a$ . Poiché  $\lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = +\infty$ , esiste sempre una radice  $u_3 > 1$ , che non corrisponde a valori reali di  $\theta$ . Ma  $\lim_{u \rightarrow -\infty} f(u) = -\infty$ , quindi affinché il moto possa esistere il polinomio  $f(u)$  deve avere 2 radici  $u_1, u_2$  in  $(-1, 1)$ :

$$u_1 \leq \cos \theta \leq u_2.$$

**Definizione 37.** Si dice **luogo dell'asse di simmetria** la curva descritta dal punto di intersezione dell'asse di simmetria con la sfera unitaria centrata in  $O$ .

Tale curva è compresa tra due *cerchi limite*, di co-latitudine

$$\theta_1 = \arccos u_1, \quad \theta_2 = \arccos u_2,$$

in corrispondenza ai quali  $\dot{\theta}$  si annulla.

Poniamo

$$\bar{u} = \frac{b}{a}.$$

Si presentano i 3 casi seguenti:

1. Se  $\bar{u} > u_2$ , dalla relazione

$$\dot{\varphi} = \frac{b - a \cos \theta}{\sin^2 \theta}$$

si trova che  $\dot{\varphi}$  ha lo stesso segno per tutti i possibili valori dell'angolo di nutazione compresi tra  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . Quindi l'asse del rotatore precede attorno all'asse verticale in modo irregolare, cioè appaiono anche delle *nutazioni*.

2. Se  $u_1 < \bar{u} < u_2$  la direzione del moto di precessione è diversa in corrispondenza dei due cerchi limite. Il luogo dell'asse di simmetria presenta dei *loop*.
3. Se  $\bar{u} = u_1$  oppure  $\bar{u} = u_2$  allora sia  $\dot{\theta}$  che  $\dot{\varphi}$  si annullano sul cerchio limite corrispondente ed il luogo dell'asse di simmetria ha delle *cuspidi* che toccano il cerchio limite.

Osserviamo che per condizioni iniziali  $\theta = \theta_0 \in (0, \pi)$ ,  $\dot{\theta} = \dot{\varphi} = 0$  si ha necessariamente  $\theta_0 = \theta_2$ , infatti il rotatore parte sempre in caduta.

... inserire figura del luogo dell'asse di simmetria ...

## 11.3 Teorema di Noether

Ricordiamo le proprietà dell'azione  $\varphi : U \times G \rightarrow U$  di un gruppo a un parametro di diffeomorfismi  $G$  su un insieme  $U$ . In particolare consideriamo  $G = \mathbb{R}$ ,  $U = \mathbb{R}^n$ .

- i)  $\varphi_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  è un diffeomorfismo per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ ;
- ii)  $\varphi_0 = \text{Id}$ ;
- iii)  $\varphi_{\alpha+\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta$  per ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  (proprietà di semigrupp);

Oltre a  $\varphi_\alpha(\mathbf{q})$ ,  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  useremo anche la notazione  $\varphi(\mathbf{q}, \alpha)$  e assumeremo in seguito che le mappe  $\varphi$  siano di classe  $C^2$  nella coppia di variabili  $(\mathbf{q}, \alpha)$ .

**Definizione 38.** Dato un gruppo a un parametro di diffeomorfismi  $\varphi_\alpha(\mathbf{q})$ , si dice **generatore infinitesimo dell'azione il vettore**

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(\mathbf{q}, 0). \quad (11.12)$$

**Osservazione 48.** Se  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una funzione di classe  $C^1$ , tale che il flusso integrale  $\Phi(\mathbf{u}, t)$  dell'equazione differenziale  $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(\mathbf{u})$  sia completo (cioè definito su tutto  $\mathbb{R}$ ), allora  $\Phi$  è un'azione di  $\mathbb{R}$  su  $\mathbb{R}^n$ .

**Osservazione 49.** Più in generale, si può definire l'azione di un gruppo locale, cioè ci si può restringere ad un intervallo in cui è definito il parametro del gruppo: nell'osservazione precedente questo permette di considerare anche il caso in cui il flusso non sia completo.

**Proposizione 68.** Ogni azione  $\varphi(\mathbf{q}, \alpha)$  è il flusso del suo generatore infinitesimo.

*Dimostrazione.* La tesi segue dalla definizione di derivata parziale e dalla proprietà di semigrupp:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(\mathbf{q}, \alpha) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(\mathbf{q}, \alpha + h) - \varphi(\mathbf{q}, \alpha)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(\varphi(\mathbf{q}, \alpha), h) - \varphi(\varphi(\mathbf{q}, \alpha), 0)}{h} = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(\varphi(\mathbf{q}, \alpha), 0) = \boldsymbol{\xi}(\varphi(\mathbf{q}, \alpha)). \end{aligned}$$

□

**Osservazione 50.** Nel contesto delle varietà ho bisogno di restringermi ad un'azione locale (gruppo a un parametro locale di diffeomorfismi), vedi [17].

Si consideri l'azione di un gruppo  $G$  a un parametro (locale) di diffeomorfismi di classe  $C^2$  sulla varietà delle configurazioni  $\mathcal{C}$ :

$$\mathbf{q} \mapsto \mathbf{Q} = \varphi_\alpha(\mathbf{q}) = \varphi(\mathbf{q}, \alpha),$$

e la corrispondente azione indotta sul fibrato tangente  $TC$ :

$$(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mapsto (\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) = \left( \varphi(\mathbf{q}, \alpha), \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \alpha) \dot{\mathbf{q}} \right)$$

Vale il seguente

**Teorema 2.** (Noether) *Se la Lagrangiana  $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  è invariante per l'azione indotta su  $TC$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , cioè*

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = L\left(\varphi(\mathbf{q}, \alpha), \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \alpha) \dot{\mathbf{q}}, t\right), \quad (11.13)$$

allora le equazioni di Lagrange ammettono l'integrale primo

$$I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot \boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}). \quad (11.14)$$

dove  $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$  è il momento coniugato a  $\mathbf{q}$  e  $\boldsymbol{\xi}$  è il generatore infinitesimo dell'azione  $\varphi_\alpha$ , dato dalla (11.12).

*Dimostrazione.* Deriviamo la (11.13) rispetto ad  $\alpha$  e valutiamo il risultato in  $\alpha = 0$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial \alpha} L\left(\varphi(\mathbf{q}, \alpha), \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \alpha) \dot{\mathbf{q}}, t\right) \Big|_{\alpha=0} = \\ &= \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(\mathbf{q}, 0) + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, 0) \dot{\mathbf{q}}, \end{aligned}$$

in cui abbiamo usato<sup>2</sup>

$$\varphi(\mathbf{q}, 0) = \mathbf{q}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, 0) = \text{Id}.$$

Lungo le soluzioni  $t \rightarrow \mathbf{q}(t)$  dell'equazione di Lagrange, scambiando l'ordine di derivazione e ricordando la (11.12) si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, 0) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(\mathbf{q}, 0) + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, 0) \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathbf{q} \partial \alpha}(\mathbf{q}, 0) \dot{\mathbf{q}} = \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(\mathbf{q}, 0) \right), \end{aligned}$$

<sup>2</sup>la seconda relazione segue da

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_h}(\mathbf{q}, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\varphi(\mathbf{q} + k\mathbf{e}_h, 0) - \varphi(\mathbf{q}, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k\mathbf{e}_h}{k} = \mathbf{e}_h, \quad h = 1, \dots, n.$$

quindi, per la (11.12),

$$I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot \boldsymbol{\xi}(\mathbf{q})$$

è un integrale primo del sistema lagrangiano. □

**Esempio 30.** Consideriamo la lagrangiana

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{q}}|^2 - V(|\mathbf{q}|), \quad \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3,$$

relativa al moto di un punto materiale  $P$  di massa  $m$  in  $\mathbb{R}^3$ , soggetto ad una forza centrale, di centro l'origine del sistema di coordinate, con energia potenziale  $V$ . La lagrangiana  $L$  è invariante per l'azione  $\varphi(\mathbf{q}, \alpha) = R_\alpha(\mathbf{a})\mathbf{q}$  dove  $R_\alpha(\mathbf{a})$  è la matrice di rotazione di un angolo qualunque  $\alpha$  attorno ad un qualunque asse  $O\mathbf{a}$  di direzione  $\mathbf{a}$  ( $|\mathbf{a}| = 1$ ), passante per l'origine  $O$ .

Il generatore infinitesimo dell'azione è

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}) = \mathbf{a} \times \mathbf{q}$$

dove  $A$  è la matrice antisimmetrica associata ad  $\mathbf{a}$  tramite la relazione

$$A\mathbf{u} = \mathbf{a} \times \mathbf{u}, \quad \text{per ogni } \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3.$$

Questo si può vedere calcolando esplicitamente la soluzione generale

$$\mathbf{u}(t) = \exp(tA)\mathbf{u}_0, \quad \mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^3$$

dell'equazione differenziale lineare

$$\dot{\mathbf{u}} = A\mathbf{u}$$

e notando che

$$\exp(tA) = R_t(\mathbf{a}).$$

Possiamo assumere per semplicità che  $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$ , quindi  $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{a} \times \mathbf{u}$  si scrive

$$\dot{u}_1 = -u_2, \quad \dot{u}_2 = u_1, \quad \dot{u}_3 = 0,$$

il cui flusso integrale è  $\Phi(\mathbf{u}_0, t) = R_t\mathbf{u}_0$ , con

$$R_t = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dal Teorema di Noether si ottiene quindi l'integrale primo

$$I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = m\mathbf{a} \times \mathbf{q} \cdot \dot{\mathbf{q}} = m\mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{a}$$

per ogni scelta di  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ . Dall'arbitrarietà di  $\mathbf{a}$  otteniamo quindi la conservazione del momento angolare rispetto al centro  $O$ .

Mostriamo adesso come si trasformano i flussi in corrispondenza ad un cambiamento di coordinate.

**Proposizione 69.** *Sia  $\Phi^t(\mathbf{x})$  il flusso integrale dell'equazione differenziale*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}). \quad (11.15)$$

*Consideriamo un cambiamento di coordinate  $\mathbf{y} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$  e l'equazione differenziale corrispondente a (11.15) nelle coordinate  $\mathbf{y}$ :*

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{G}(\mathbf{y}), \quad (11.16)$$

dove

$$\mathbf{G} = \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{F} \right) \circ \mathbf{u}^{-1}. \quad (11.17)$$

Allora la mappa

$$\Psi^t(\mathbf{y}) = \mathbf{u} \circ \Phi^t \circ \mathbf{u}^{-1}(\mathbf{y}) \quad (11.18)$$

è il flusso integrale di (11.16).

*Dimostrazione.* Osserviamo che si ha

$$\Psi^0(\mathbf{y}) = \mathbf{u} \circ \Phi^0. \quad (11.19)$$

Inoltre, dalla formula (11.18) e dalla relazione

$$\mathbf{F} = \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right]^{-1} (\mathbf{G} \circ \mathbf{u}),$$

che segue dalla (11.17), si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Psi^t(\mathbf{y}) &= \frac{d}{dt} (\mathbf{u} \circ \Phi^t \circ \mathbf{u}^{-1}(\mathbf{y})) \\ &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} (\Phi^t \circ \mathbf{u}^{-1}(\mathbf{y})) \frac{d}{dt} (\Phi^t \circ \mathbf{u}^{-1}(\mathbf{y})) \\ &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} (\Phi^t \circ \mathbf{u}^{-1}(\mathbf{y})) \mathbf{F}(\Phi^t \circ \mathbf{u}^{-1}(\mathbf{y})) \\ &= \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right]^{-1} (\mathbf{G} \circ \mathbf{u}) \right) (\Phi^t \circ \mathbf{u}^{-1}(\mathbf{y})) \\ &= \mathbf{G}(\mathbf{u} \circ \Phi^t \circ \mathbf{u}^{-1}(\mathbf{y})) \\ &= \mathbf{G}(\Psi^t(\mathbf{u})). \end{aligned}$$

□

Nella dimostrazione della prossima proposizione useremo il seguente risultato:

**Teorema 3.** (rettificazione locale) Sia  $\Phi^t(\mathbf{x})$  il flusso dell'equazione differenziale

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

e sia  $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$  tale che  $\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}) \neq \mathbf{0}$ . Allora esiste un intorno  $\mathcal{U}$  di  $\bar{\mathbf{x}}$  ed un cambiamento di coordinate locale

$$\mathcal{U} \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = \mathbf{u}(\mathbf{x}),$$

tale che

$$\mathbf{u}^{-1} \circ \Psi^t(\mathbf{y}) = \Phi^t \circ \mathbf{u}^{-1}(\mathbf{y}), \quad (11.20)$$

dove

$$\Psi^t(\mathbf{y}) = \mathbf{y} + t\mathbf{e}_1,$$

cioè il flusso  $\Phi^t$  nelle nuove variabili è lineare in  $t$ .

*Dimostrazione.* A meno di traslare l'origine e rinumerare le coordinate possiamo assumere che

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}, \quad F_1(\mathbf{0}) \neq 0,$$

dove  $F_1$  è la prima componente di  $\mathbf{F}$ . Consideriamo la mappa

$$\mathbf{w}(\mathbf{y}) = \Phi^{y_1}(0, y_2, \dots, y_n).$$

Dalle relazioni

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y_1}(\mathbf{0}) = \mathbf{F}(\mathbf{0}), \quad \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y_j}(\mathbf{0}) = \mathbf{e}_j, \quad j = 2, \dots, n$$

si ottiene

$$\det \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{0}) = F_1(\mathbf{0}),$$

quindi  $\mathbf{w}$  definisce un diffeomorfismo da un intorno  $\mathcal{V}$  di  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$  ad un intorno  $\mathcal{U}$  di  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Sia  $\mathbf{u} = \mathbf{w}^{-1} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$  il diffeomorfismo inverso.

Ponendo

$$\Psi^t(\mathbf{y}) = \mathbf{y} + t\mathbf{e}_1$$

e usando la proprietà di semigruppato del flusso si ottiene la (11.20), infatti

$$\mathbf{w} \circ \Psi^t(\mathbf{y}) = \Phi^{y_1+t}(0, y_2, \dots, y_n) = \Phi^t \circ \mathbf{w}(\mathbf{y}).$$

□

**Proposizione 70.** Sia  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  una lagrangiana invariante per l'azione  $\varphi_\alpha$ , cioè tale che

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = L(\varphi_\alpha(\mathbf{q}), \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, t)$$

per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Sia inoltre  $\bar{\mathbf{q}}$  una configurazione per cui  $\boldsymbol{\xi}(\bar{\mathbf{q}}) \neq \mathbf{0}$ , dove  $\boldsymbol{\xi}$  è il generatore infinitesimo di  $\varphi_\alpha(\mathbf{q})$ . In queste ipotesi esiste un intorno  $\mathcal{U}$  di  $\bar{\mathbf{q}}$  ed una trasformazione di coordinate

$$\mathcal{U} \ni \mathbf{q} \mapsto \mathbf{Q} = \mathbf{u}(\mathbf{q})$$

tale che la coordinata  $Q_1$  (i.e. la prima componente di  $\mathbf{Q}$ ) sia ciclica nella lagrangiana

$$\mathcal{L}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) = L\left(\mathbf{u}^{-1}(\mathbf{Q}), \frac{\partial \mathbf{u}^{-1}}{\partial \mathbf{Q}}(\mathbf{Q})\dot{\mathbf{Q}}, t\right), \quad (11.21)$$

che per la Proposizione 62 definisce la stessa dinamica lagrangiana nelle coordinate  $\mathbf{Q}$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo  $\bar{\mathbf{q}}$  tale che  $\boldsymbol{\xi}(\bar{\mathbf{q}}) \neq \mathbf{0}$ , con  $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(\mathbf{q}, 0)$ . Per il teorema di rettificazione del flusso (vedi Teorema 3) possiamo trovare un cambiamento di coordinate  $\mathbf{Q} = \mathbf{u}(\mathbf{q})$  in un intorno di  $\bar{\mathbf{q}}$  che coniuga l'azione  $\varphi_\alpha$ , che è il flusso del suo generatore infinitesimo  $\boldsymbol{\xi}$ , alla mappa

$$\boldsymbol{\eta}_\alpha(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q} + \alpha \mathbf{e}_1 = \mathbf{u} \circ \varphi_\alpha \circ \mathbf{u}^{-1}(\mathbf{Q}).$$

Inoltre la lagrangiana  $\mathcal{L}$ , definita da (11.21), è invariante per l'azione  $\boldsymbol{\eta}_\alpha$ , infatti

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) &= L\left(\mathbf{u}^{-1}(\mathbf{Q}), \frac{\partial \mathbf{u}^{-1}}{\partial \mathbf{Q}}(\mathbf{Q})\dot{\mathbf{Q}}, t\right) = \\ &= L\left(\varphi_\alpha \circ \mathbf{u}^{-1}(\mathbf{Q}), \left[\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \mathbf{q}} \circ \mathbf{u}^{-1}(\mathbf{Q})\right] \frac{\partial \mathbf{u}^{-1}}{\partial \mathbf{Q}}(\mathbf{Q})\dot{\mathbf{Q}}, t\right) = \\ &= L\left(\mathbf{u}^{-1} \circ \boldsymbol{\eta}_\alpha(\mathbf{Q}), \left[\frac{\partial \mathbf{u}^{-1}}{\partial \mathbf{Q}} \circ \boldsymbol{\eta}_\alpha(\mathbf{Q})\right] \frac{\partial \boldsymbol{\eta}_\alpha}{\partial \mathbf{Q}}(\mathbf{Q})\dot{\mathbf{Q}}, t\right) = \\ &= \mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}_\alpha(\mathbf{Q}), \frac{\partial \boldsymbol{\eta}_\alpha}{\partial \mathbf{Q}}(\mathbf{Q})\dot{\mathbf{Q}}, t) = \mathcal{L}(\mathbf{Q} + \alpha \mathbf{e}_1, \dot{\mathbf{Q}}, t). \end{aligned} \quad (11.22)$$

Nel ricavare la relazione precedente abbiamo usato l'invarianza di  $L$  per l'azione  $\varphi_\alpha$  e la relazione di coniugazione, che si può scrivere anche

$$\mathbf{u}^{-1} \circ \boldsymbol{\eta}_\alpha = \varphi_\alpha \circ \mathbf{u}^{-1}$$

da cui, derivando rispetto a  $\mathbf{Q}$ , si ottiene

$$\frac{\partial \mathbf{u}^{-1}}{\partial \mathbf{Q}} \circ \boldsymbol{\eta}_\alpha(\mathbf{Q}) \frac{\partial \boldsymbol{\eta}_\alpha}{\partial \mathbf{Q}}(\mathbf{Q}) = \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \mathbf{q}} \circ \mathbf{u}^{-1}(\mathbf{Q}) \frac{\partial \mathbf{u}^{-1}}{\partial \mathbf{Q}}(\mathbf{Q}).$$

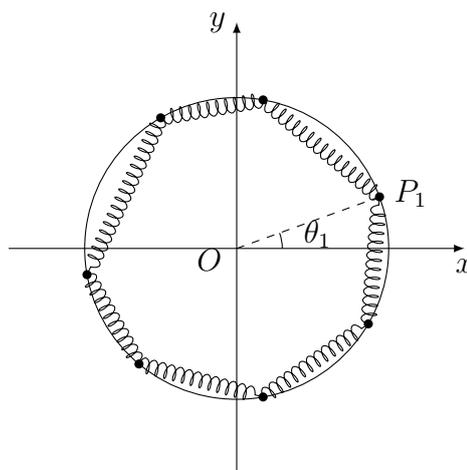
Concludiamo che  $\mathcal{L}$  è indipendente da  $Q_1$ , infatti dalla (11.22) segue che

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_1}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(\mathbf{Q} + h\mathbf{e}_1, \dot{\mathbf{Q}}, t) - \mathcal{L}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t)}{h} = 0.$$

□

## 11.4 Esercizi

**Esercizio 49.** In un piano orizzontale si fissi un sistema di riferimento  $Oxy$ . Si consideri il sistema meccanico descritto in figura, composto da  $N$  punti materiali  $P_1 \dots P_N$ , di ugual massa  $m$ . I punti  $P_j$  possono scorrere su una circonferenza di raggio  $R$  centrata in  $O$ . Inoltre ogni punto  $P_j, j = 1 \dots N$ , è collegato sia a  $P_{j-1}$  che a  $P_{j+1}$  da molle uguali di costante elastica  $k$  (abbiamo assunto  $P_0 = P_N, P_{N+1} = P_1$ ). Supponiamo che la guida sia liscia e che i punti materiali possano attraversarsi a vicenda. Si usino come coordinate lagrangiane gli angoli  $\theta_j, j = 1 \dots N$  che i segmenti  $OP_j$  formano con l'asse  $Ox$ .



(i) Scrivere la lagrangiana  $L$  del sistema.

(ii) Determinare un'azione  $\phi_\alpha(\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_N)$ , del gruppo  $\mathbb{R}$  sul toro  $\mathbb{T}^N$  tale che  $L$  sia invariante per l'azione indotta su  $T\mathbb{T}^N$ , scrivere il generatore infinitesimo  $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\theta})$  dell'azione  $\phi_\alpha(\boldsymbol{\theta})$  e trovare il corrispondente integrale primo del sistema lagrangiano associato ad  $L$ .

- (iii) Trovare una trasformazione di coordinate  $(\theta_1, \dots, \theta_N) = \boldsymbol{\theta} \xrightarrow{\Psi} \boldsymbol{\Theta} = (\Theta_1, \dots, \Theta_N)$  per cui la lagrangiana  $L$ , scritta nelle nuove coordinate, abbia una variabile ciclica.<sup>3</sup>
- (iv) Scrivere la lagrangiana ridotta con il metodo di Routh.
- (v) Scrivere le equazioni degli equilibri nello spazio delle fasi ridotto.
- (vi) Verificare che, se  $N > 4$ , le configurazioni con  $\theta_{j+1} - \theta_j = \frac{2\pi}{N}, j = 1 \dots N$  corrispondono ad un equilibrio stabile nello spazio delle fasi ridotto.

---

<sup>3</sup>Suggerimento: (1) scrivere il flusso integrale  $\Phi_t(\boldsymbol{\theta})$  di  $\dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\theta})$ ; (2) considerare la trasformazione  $\Psi(\boldsymbol{\theta}) = \Phi_{\theta_1}(0, -\theta_2, \dots, -\theta_N)$  e scrivere il campo vettoriale  $\boldsymbol{\xi}$  nelle variabili  $\boldsymbol{\Theta} = \Psi(\boldsymbol{\theta})$ ; (3) osservare che la variabile  $\Theta_1$  è ciclica nella lagrangiana espressa in funzione di  $\boldsymbol{\Theta}, \dot{\boldsymbol{\Theta}}$ .

# Capitolo 12

## Equilibri e stabilità

Caratterizziamo le configurazioni di equilibrio per le equazioni di Lagrange e successivamente ne studiamo la stabilità tramite linearizzazione o tramite il metodo della funzione di Lyapounov. Consideriamo anche le piccole oscillazioni attorno ad una configurazione di equilibrio stabile.

### 12.1 Caratterizzazione degli equilibri

Consideriamo le equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = Q_h, \quad h = 1, \dots, n \quad (12.1)$$

per vincoli fissi, cioè  $T = T_2 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$ , e per forze non dipendenti da  $t$ . Le (12.1) si possono scrivere nel modo seguente:

$$A(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (12.2)$$

con

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \nabla_{\mathbf{q}} T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \frac{dA}{dt}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}.$$

Poiché  $A$  è definita positiva, le (12.2) si possono mettere in forma normale ed equivalgono al sistema di equazioni del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} = A^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{v}). \end{cases} \quad (12.3)$$

Si ottiene che i punti di equilibrio sono della forma  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = (\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$ ,

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}_0, \mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad (12.4)$$

infatti  $\mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{0}) = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{0})$ .

**Definizione 39.** I valori  $\mathbf{q}_0$ , soluzioni di (12.4), si chiamano **configurazioni di equilibrio**.

**Osservazione 51.** In corrispondenza alle configurazioni di equilibrio  $\mathbf{q}_0$  si hanno soluzioni costanti  $\mathbf{x}(t) = \chi(\mathbf{q}_0)$  delle equazioni di Newton.

Se le forze attive derivano da un'energia potenziale generalizzata  $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = V_0(\mathbf{q}) + V_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  possiamo scrivere la lagrangiana

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}).$$

In questo caso le configurazioni di equilibrio sono definite dall'equazione

$$\frac{\partial V_0}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) = \mathbf{0}, \quad (12.5)$$

infatti, dalla relazione

$$\mathbf{Q} = \frac{d}{dt} \frac{\partial V_1}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial V_1}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial V_0}{\partial \mathbf{q}},$$

tenendo conto che

$$V_1 = \mathbf{a}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial V_1}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}, \quad \frac{\partial V_1}{\partial \mathbf{q}} = \left[ \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{q}} \right]^T \dot{\mathbf{q}},$$

si ottiene

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{0}) = -\frac{\partial V_0}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}).$$

## 12.2 Linearizzazione attorno a un equilibrio

Dato un punto di equilibrio  $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$ , proviamo ad analizzare la sua stabilità linearizzando le equazioni (12.3) in un intorno di questo punto. Poiché i termini

$$\nabla_{\mathbf{q}} T, \quad \frac{dA}{dt} \dot{\mathbf{q}}$$

sono almeno quadratici omogenei in  $\dot{\mathbf{q}}$ , le equazioni linearizzate sono

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} = A^{-1}(\mathbf{q}_0) \left[ \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) + \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})\mathbf{v} \right]. \end{cases} \quad (12.6)$$

Se le forze attive derivano dall'energia potenziale  $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = V_0(\mathbf{q}) + \mathbf{a}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}}$  si ha (vedi Sezione 10.7)

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = -\frac{\partial V_0}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}) + B(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

e le equazioni linearizzate sono

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} = -A^{-1}(\mathbf{q}_0) [V_0''(\mathbf{q}_0)(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) - B(\mathbf{q}_0)\mathbf{v}], \end{cases} \quad (12.7)$$

dove  $B$  è antisimmetrica con componenti  $B_{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial q_j} - \frac{\partial a_j}{\partial q_i}$ . Le (12.7) sono le equazioni di Lagrange per la funzione

$$\begin{aligned} L_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q}_0) \dot{\mathbf{q}} - V_0(\mathbf{q}_0) - \frac{1}{2} (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) \cdot V_0''(\mathbf{q}_0) (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) \\ &\quad - \left[ \mathbf{a}(\mathbf{q}_0) + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) \right] \cdot \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (12.8)$$

che è lo sviluppo di Taylor di  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  al secondo ordine centrato in  $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$ . Verifichiamo che le (12.7) corrispondono alle equazioni di Lagrange per  $L_0$ . Dalle relazioni

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_0}{\partial \dot{\mathbf{q}}} &= A(\mathbf{q}_0) \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{a}(\mathbf{q}_0) - \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0), \\ \frac{\partial L_0}{\partial \mathbf{q}} &= -V_0''(\mathbf{q}_0) (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) - \left[ \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) \right]^T \dot{\mathbf{q}} \end{aligned}$$

si ottiene

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_0}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L_0}{\partial \mathbf{q}} = A(\mathbf{q}_0) \ddot{\mathbf{q}} - \left( \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) - \left[ \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) \right]^T \right) \dot{\mathbf{q}} + V_0''(\mathbf{q}_0) (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0),$$

che dimostra che le equazioni di Lagrange per  $L_0$  corrispondono alle (12.7).

Nel caso particolare in cui  $V = V_0$ , tralasciando la costante  $-V_0(\mathbf{q}_0)$ , si ottiene

$$L_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q}_0) \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) \cdot V''(\mathbf{q}_0) (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0). \quad (12.9)$$

Le equazioni di Lagrange per (12.9) sono

$$A(\mathbf{q}_0) \ddot{\mathbf{q}} + V''(\mathbf{q}_0) (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) = \mathbf{0} \quad (12.10)$$

e si possono scrivere come

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\xi}} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} \end{bmatrix} = \Lambda(\mathbf{q}_0) \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix}, \quad (12.11)$$

con

$$\Lambda(\mathbf{q}_0) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I \\ -A^{-1}V''(\mathbf{q}_0) & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} - \mathbf{q}_0 \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}.$$

In questo caso la matrice del sistema linearizzato ha autovalori che dipendono solo dagli autovalori di  $A^{-1}V''(\mathbf{q}_0)$ . Siccome  $A(\mathbf{q}_0)$ ,  $V''(\mathbf{q}_0)$  sono simmetriche, con  $A$  definita positiva, sappiamo (vedi Sezione 12.7) che gli autovalori  $\lambda_h$  di  $A^{-1}V''(\mathbf{q}_0)$  sono reali e che possiamo trovare una base di autovettori

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$$

ortonormali rispetto al prodotto scalare definito da  $A(\mathbf{q}_0)$ , cioè tali che

$$\mathbf{u}_h \cdot A(\mathbf{q}_0)\mathbf{u}_k = \delta_{hk},$$

dove  $\delta_{hk}$  è il delta di Kronecker. Per il teorema di Binet si ha

$$\det(A^{-1}V'' - \lambda I) = \det A^{-1} \det(V'' - \lambda A),$$

quindi gli autovalori  $\lambda_h$  si possono calcolare risolvendo l'equazione

$$\det(V''(\mathbf{q}_0) - \lambda A(\mathbf{q}_0)) = 0,$$

detta **equazione secolare**, evitando di calcolare  $A^{-1}(\mathbf{q}_0)$ . Inoltre si ha

$$\mathbf{u}_h \cdot V''(\mathbf{q}_0)\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_h \cdot \lambda_k A(\mathbf{q}_0)\mathbf{u}_k = \lambda_k \delta_{hk},$$

cioè nella base  $\mathcal{B}$  entrambe le matrici  $A(\mathbf{q}_0)$ ,  $V''(\mathbf{q}_0)$  sono in forma diagonale.

Osserviamo che, se  $\lambda_h$ ,  $h = 1, \dots, n$  sono gli autovalori di  $A^{-1}V''(\mathbf{q}_0)$ , allora gli autovalori di  $\Lambda(\mathbf{q}_0)$  sono

$$\pm \sqrt{-\lambda_h}, \quad h = 1, \dots, n.$$

In particolare, se  $\lambda_k < 0$  per qualche  $k$  allora  $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$  è instabile perché il sistema (12.11) ha un esponente di Lyapounov positivo.<sup>1</sup>

Se  $\lambda_h \geq 0$  per  $h = 1, \dots, n$  allora gli autovalori di  $\Lambda(\mathbf{q}_0)$  sono tutti immaginari puri oppure nulli, quindi gli esponenti di Lyapounov sono tutti nulli ed il metodo di linearizzazione non ci permette di concludere niente sulla stabilità di  $\mathbf{q}_0$ . In questo caso per studiare la stabilità possiamo usare il metodo descritto nella prossima sezione.

### 12.3 Il teorema di Lagrange-Dirichlet

Si consideri un punto di equilibrio  $\mathbf{x}_0$  del sistema di equazioni differenziali

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (12.12)$$

<sup>1</sup>gli esponenti di Lyapounov di un punto di equilibrio  $\mathbf{x}_0$  di un sistema di equazioni differenziali  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  sono le parti reali degli autovalori della matrice  $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0)$ .

**Definizione 40.** Si dice che una funzione  $f \in C^1(U; \mathbb{R})$ , definita in un intorno  $U$  di un punto di equilibrio  $\mathbf{x}_0$  di (12.12), è una funzione di Lyapounov per  $\mathbf{x}_0$  se valgono le seguenti proprietà:

i)  $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}_0)$  per ogni  $\mathbf{x} \in U \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ ;

ii)  $\frac{df}{dt}(\mathbf{x}) \leq 0$  per ogni  $\mathbf{x} \in U$ .

dove  $\frac{df}{dt}$  è la derivata di  $f$  lungo una qualunque soluzione di (12.12), cioè

$$\frac{df}{dt}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}).$$

Vale il seguente risultato:

**Teorema 4.** (Lyapounov) Se un punto di equilibrio ammette una funzione di Lyapounov allora è stabile.

*Dimostrazione.* Sia  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di Lyapounov per il punto di equilibrio  $\mathbf{x}_0 \in U$ , dove  $U$  è un aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Per ogni palla  $B = B(\mathbf{x}_0, r)$  di centro  $\mathbf{x}_0$  e raggio  $r$  contenuta in  $U$  sia  $\partial B$  la sfera che costituisce il bordo di  $B$  e definiamo

$$m = \min_{\mathbf{x} \in \partial B} f(\mathbf{x}).$$

Consideriamo la componente connessa  $V$  dell'insieme

$$\{\mathbf{x} \in B : f(\mathbf{x}) < m\}$$

che contiene  $\mathbf{x}_0$ . Se  $\mathbf{y} \in V$ , allora la traiettoria della soluzione  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t; 0, \mathbf{y})$  di (12.12) che parte da  $\mathbf{y}$  al tempo  $t = 0$  non potrà mai uscire da  $B$  per tempi  $t > 0$  perchè per farlo dovrebbe necessariamente passare dal bordo di  $B$  sul quale la funzione composta  $f(\mathbf{x}(t))$  avrebbe un valore superiore al valore iniziale  $f(\mathbf{y})$ , contraddicendo la proprietà ii) delle funzioni di Lyapounov. □

**Teorema 5.** (Lagrange-Dirichlet) Consideriamo il sistema lagrangiano definito da

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - V_0(\mathbf{q}) - V_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}). \quad (12.13)$$

Se  $\mathbf{q}_0$  è un minimo locale stretto di  $V_0$  allora  $\mathbf{q}_0$  è una configurazione di equilibrio stabile.

*Dimostrazione.* Si osserva che  $\mathbf{q}_0$  è una configurazione di equilibrio in quanto soddisfa (12.5). Siccome la lagrangiana (12.13) non dipende da  $t$ , allora la funzione

$$J(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + V_0(\mathbf{q}).$$

è un integrale primo delle equazioni di Lagrange per  $L$  (è l'integrale di Jacobi, vedi Proposizione 66). Inoltre  $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$  è un punto di minimo locale stretto per  $J(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , quindi si può usare  $J(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  come funzione di Lyapounov relativa al punto  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = (\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$  restringendola ad un opportuno intorno di tale punto. □

## 12.4 Analisi della stabilità

Nel caso in cui le forze generalizzate siano conservative, con energia potenziale  $V = V_0(\mathbf{q})$ , l'analisi del solo spettro di  $V''(\mathbf{q}_0)$ , dove  $\mathbf{q}_0$  è una configurazione di equilibrio, ci può permettere di determinare le proprietà di stabilità dei punti di equilibrio di (12.11).

Se  $V''(\mathbf{q}_0)$  ha tutti gli autovalori positivi allora  $\mathbf{q}_0$  è un minimo stretto (non degenere) di  $V$ , quindi il punto  $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$  è stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet.

Se  $V''(\mathbf{q}_0)$  ha un autovalore  $\mu < 0$  con autovettore  $\mathbf{v}$ , sia

$$\mathbf{v} = \sum_h v_h \mathbf{u}_h$$

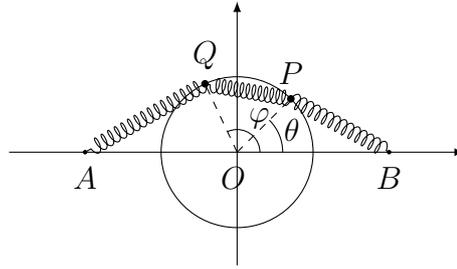
l'espressione di  $\mathbf{v}$  come combinazione lineare degli elementi della base  $\mathcal{B}$ . Allora

$$\begin{aligned} 0 > \mu |\mathbf{v}|^2 &= \mathbf{v} \cdot V''(\mathbf{q}_0) \mathbf{v} = \sum_{h,k=1}^n v_h v_k \mathbf{u}_h \cdot V''(\mathbf{q}_0) \mathbf{u}_k = \sum_{h,k=1}^n v_h v_k \lambda_k \mathbf{u}_h \cdot A(\mathbf{q}_0) \mathbf{u}_k = \\ &= \sum_{h,k=1}^n v_h v_k \lambda_k \delta_{hk} = \sum_{h=1}^n v_h^2 \lambda_h, \end{aligned}$$

quindi esiste  $k$  con  $\lambda_k < 0$  ed il punto  $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$  è instabile perchè il sistema linearizzato (12.11) ha un esponente di Lyapounov positivo.

**Esercizio 50.** *Si consideri il sistema meccanico in Figura 50, in cui  $A \equiv (-2, 0)$ ,  $B \equiv (2, 0)$  e la guida circolare, centrata nell'origine del riferimento  $Oxy$ , ha raggio unitario. Calcolare tutti gli equilibri e studiarne la stabilità al variare dei parametri.*

**Esercizio 51.** *Nel piano  $Oxy$  si consideri il sistema meccanico formato da  $n$  punti materiali  $P_1, \dots, P_n$  di ugual massa  $m$ . Il punto  $P_i$  è vincolato a muoversi sulla*



retta  $x = i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Inoltre ogni  $P_i$  è collegato ai punti  $P_{i-1}$  e  $P_{i+1}$  da due molle di costante elastica  $k$ , dove si è posto  $P_0 \equiv (0, 0)$ ,  $P_{n+1} \equiv (n+1, 0)$ . Si usano come coordinate i valori  $q_i = y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  delle ordinate dei punti  $P_i$ . Scrivere le equazioni di Lagrange, trovare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità.

## 12.5 Stabilizzazione con termini girostatici

Se le componenti lagrangiane delle forze attive ammettono un'energia potenziale generalizzata  $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = V_0(\mathbf{q}, t) + V_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  è possibile che un punto di massimo di  $V_0$  sia stabile: infatti la presenza del termine  $V_1$  modifica lo spettro del linearizzato, anche se non modifica gli equilibri. Questo fenomeno si chiama **stabilizzazione girostatica**.

**Esempio 31.** (*oscillatore armonico in un riferimento rotante*)

Fissiamo un sistema di riferimento  $\Sigma = O \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$  in  $\mathbb{R}^3$ . Consideriamo un punto materiale di massa  $m$  collegato all'origine  $O$  del riferimento da una molla di costante elastica  $k$ . Scegliamo delle condizioni iniziali  $\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0$  per il punto al tempo  $t = 0$ . Siccome il campo di forze è centrale, dalla conservazione del momento angolare sappiamo che il moto è piano. Possiamo quindi orientare il riferimento  $\Sigma$  in modo tale che, per queste condizioni iniziali, il moto avvenga nel piano  $Oxy$ . Consideriamo adesso un riferimento  $\Sigma' = O' \hat{e}'_1 \hat{e}'_2 \hat{e}'_3$ , con  $O' = O$ , e con velocità angolare costante  $\vec{\omega} = \omega \hat{e}_3$ ,  $\omega \neq 0$ , rispetto a  $\Sigma$ .

La stabilità dell'origine per l'oscillatore armonico è nota a priori in  $\Sigma$ , e vale anche in  $\Sigma'$ . Introduciamo coordinate cartesiane  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$  relative a  $\Sigma'$  e studiamo la stabilità dell'equilibrio  $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$  nel riferimento rotante con il metodo della linearizzazione.

L'energia potenziale, tenendo conto delle forze apparenti, è

$$V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}k|\mathbf{q}|^2 - \frac{1}{2}m|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}|^2 + m\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\mathbf{q} \cdot (kI + m\Omega^2)\mathbf{q} + m\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{q}}, \quad (12.14)$$

con

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

infatti

$$|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}|^2 = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\Omega} \mathbf{q} = -\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{q},$$

poiché  $\boldsymbol{\Omega}^T = -\boldsymbol{\Omega}$ . Possiamo scrivere la (12.14) come  $V = V_0 + V_1$ , con  $V_j$  omogenea di grado  $j$  in  $\dot{\mathbf{q}}$ .

Gli equilibri (in questo caso solo  $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$ ) si ottengono cercando i punti critici di  $V_0$ . Se  $\omega^2 > \frac{k}{m}$  allora  $V_0''$  ha autovalori negativi, quindi se considerassimo solo il termine  $V_0$  per lo studio della stabilità si otterrebbe che l'origine è instabile, che è falso.

Includiamo adesso anche  $V_1$  nello studio della stabilità. Le equazioni del moto corrispondenti all'energia potenziale (12.14) si scrivono

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\frac{k}{m}\mathbf{q} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}) - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{q}}$$

oppure, come sistema del primo ordine,

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -(\frac{k}{m}I + \boldsymbol{\Omega}^2) & -2\boldsymbol{\Omega} \end{bmatrix}.$$

Dato che la terza componente di  $\mathbf{q}$  e di  $\dot{\mathbf{q}}$  è identicamente nulla, possiamo descrivere il moto con il sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}} \\ \dot{\mathbf{w}} \end{pmatrix} = \Gamma \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \beta I & -2\omega J \end{bmatrix},$$

dove

$$\mathbf{z} = (q_1, q_2)^T, \quad \beta = \omega^2 - \frac{k}{m}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori di  $\Gamma$  si ottengono dall'equazione

$$\det(\Gamma - \lambda I) = \lambda^4 + 2(2\omega^2 - \beta)\lambda^2 + \beta^2 = 0. \quad (12.15)$$

Il discriminante è

$$\Delta = 16\omega^2(\omega^2 - \beta) = 16\omega^2 \frac{k}{m} > 0,$$

quindi le radici  $\lambda^2$  di (12.15) sono reali e distinte. Inoltre, dato che  $2\omega^2 > \beta$ , per la regola dei segni di Cartesio le radici  $\lambda^2$  sono negative o nulle e gli autovalori di  $\Gamma$  sono immaginari puri o nulli:

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega, \quad \lambda_{3,4} = \pm i\omega', \quad \omega' \neq \omega.$$

L'origine risulta quindi una configurazione di equilibrio stabile.

**Osservazione 52.** L'esempio precedente mostra che nel teorema di Lagrange-Dirichlet l'ipotesi che  $\mathbf{q}_0$  sia un punto di minimo stretto per  $V_0$  è una condizione sufficiente, ma non necessaria, per la stabilità di  $\mathbf{q}_0$ , infatti

$$V_0'' = kI + m\boldsymbol{\Omega}^2 = (k - m\omega^2)I$$

e, se  $\omega > \sqrt{k/m}$ , allora  $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$  è un punto di massimo per  $V_0$ .

## 12.6 Piccole oscillazioni attorno a un equilibrio stabile

Assumiamo che la lagrangiana abbia la forma

$$L = T_2 - V,$$

con  $V = V_0$ , e che  $\mathbf{q}_0$  sia un minimo non degenero di  $V$ . Quindi, per il teorema di Lagrange-Dirichlet,  $\mathbf{q}_0$  è una configurazione di equilibrio stabile. Siano  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  gli autovalori di  $A^{-1}V''(\mathbf{q}_0)$ , soluzioni di

$$\det(V''(\mathbf{q}_0) - \lambda A(\mathbf{q}_0)) = 0.$$

Osserviamo che moltiplicando scalarmente l'equazione  $V''(\mathbf{q}_0)\mathbf{u}_h = \lambda_h A\mathbf{u}_h$  per  $\mathbf{u}_h$  si ottiene

$$\lambda_h = \frac{\mathbf{u}_h \cdot V''(\mathbf{q}_0)\mathbf{u}_h}{\mathbf{u}_h \cdot A(\mathbf{q}_0)\mathbf{u}_h} > 0, \quad h = 1, \dots, n.$$

La soluzione generale del sistema lineare (12.10) è

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0 + \sum_{h=1}^n c_h \cos(\omega_h t + \varphi_h) \mathbf{u}_h \quad (12.16)$$

con  $c_h \geq 0$ ,  $\varphi_h \in S^1$ ,  $\omega_h = \sqrt{\lambda_h} > 0$ , come si può facilmente verificare per sostituzione di (12.16) in (12.10).

Le quantità  $\omega_h$  si chiamano **frequenze proprie** del sistema e le famiglie di soluzioni particolari

$$c_h \cos(\omega_h t + \varphi_h) \mathbf{u}_h, \quad h = 1, \dots, n$$

si chiamano **modi normali** di oscillazione attorno all'equilibrio  $\mathbf{q}_0$ .

## 12.7 Diagonalizzazione simultanea di forme quadratiche

Consideriamo le forme quadratiche

$$a(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x}, \quad b(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot B\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

con  $A, B$  matrici di ordine  $n$  simmetriche,  $A$  definita positiva. L'insieme di livello

$$\mathcal{E}_A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : a(\mathbf{x}) = 1\}$$

è un ellissoide, quindi è compatto. Dunque esiste  $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{E}_A$  tale che

$$b(\mathbf{x}_1) = \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{E}_A} b(\mathbf{x}).$$

Il vettore  $\mathbf{x}_1$  è un punto stazionario di  $b(\mathbf{x})$ , vincolato a  $\mathcal{E}_A$ . Dal metodo dei moltiplicatori di Lagrange si ottiene

$$B\mathbf{x}_1 = \lambda_1^{(1)} A\mathbf{x}_1, \quad \mathbf{x}_1 \cdot A\mathbf{x}_1 = 1,$$

per cui  $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{E}_A$  è autovettore di  $A^{-1}B$  con autovalore  $\lambda_1^{(1)} = b(\mathbf{x}_1)$ .

Sia  $\mathcal{S}^{n-1} = \mathbf{x}_1^\perp$  il sottospazio di dimensione  $n-1$  costituito dai vettori di  $\mathbb{R}^n$  ortogonali a  $\mathbf{x}_1$  rispetto al prodotto scalare definito da  $A$ . Denoto con  $\mathcal{E}_A^{n-2} = \mathcal{E}_A \cap \mathcal{S}^{n-1}$  l'ellissoide di dimensione  $n-2$  e considero  $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{E}_A^{n-2}$  tale che

$$b(\mathbf{x}_2) = \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{E}_A^{n-2}} b(\mathbf{x}).$$

Dal metodo dei moltiplicatori di Lagrange

$$B\mathbf{x}_2 = \lambda_2^{(2)} A\mathbf{x}_2 + \lambda_1^{(2)} A\mathbf{x}_1, \quad \mathbf{x}_2 \cdot A\mathbf{x}_2 = 1, \quad \mathbf{x}_2 \cdot A\mathbf{x}_1 = 0. \quad (12.17)$$

Moltiplicando scalarmente per  $\mathbf{x}_1$  la prima delle (12.17) e usando la simmetria di  $A$  e  $B$  si ottiene

$$\lambda_1^{(2)} = \mathbf{x}_1 \cdot B\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2 \cdot B\mathbf{x}_1 = \lambda_1^{(1)} \mathbf{x}_2 \cdot A\mathbf{x}_1 = 0,$$

per cui  $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{E}_A^{n-2}$  è autovettore di  $A^{-1}B$  con autovalore  $\lambda_2^{(2)} = b(\mathbf{x}_2)$ . Tale procedimento si può iterare cercando per ogni  $k = 3, \dots, n$  un vettore  $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$  tale che

$$b(\mathbf{x}_k) = \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{E}_A^{n-k}} b(\mathbf{x}),$$

con  $\mathcal{E}_A^{n-k} = \mathcal{E}_A \cap \mathcal{S}^{n-k+1}$ , ed  $\mathcal{S}^{n-k+1}$  il sottospazio di dimensione  $n-k+1$  costituito dai vettori di  $\mathbb{R}^n$  ortogonali a  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}$  rispetto al prodotto scalare definito da  $A$ . In questo modo trovo una base  $\mathcal{B} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$  di autovettori di  $A^{-1}B$  ortonormali rispetto al prodotto scalare definito da  $A$ , con autovalori reali

$$\lambda_1 = b(\mathbf{x}_1), \quad \lambda_2 = b(\mathbf{x}_2), \quad \dots \quad \lambda_n = b(\mathbf{x}_n),$$

dove  $\lambda_j = \lambda_j^{(j)}$ . Per calcolare esplicitamente gli autovalori  $\lambda_j$  si risolve l'equazione secolare

$$\det(B - \lambda A) = 0.$$

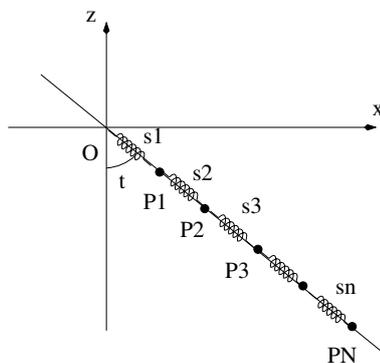
Denoto con  $U$  la trasposta della matrice che ha come colonne i vettori della base  $\mathcal{B}$ . Osserviamo che si ha

$$U^T A U = I, \quad U^T B U = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad (12.18)$$

infatti  $\mathbf{x}_i \cdot A\mathbf{x}_j = \delta_{ij}$  e  $\mathbf{x}_i \cdot B\mathbf{x}_j = \lambda_j \mathbf{x}_i \cdot A\mathbf{x}_j = \lambda_j \delta_{ij}$ . Concludiamo che le forme quadratiche  $a(\mathbf{x})$ ,  $b(\mathbf{x})$  sono rappresentate da matrici diagonali nella base  $\mathcal{B}$ .

## 12.8 Esercizi

**Esercizio 52.** Si fissi un sistema di riferimento  $Oxyz$  con asse  $Oz$  verticale ascendente e si consideri il sistema meccanico descritto in figura, mobile nel piano  $Oxz$ , composto da  $N$  punti materiali  $P_1, \dots, P_N$  di ugual massa  $m$ . I punti  $P_j$  possono

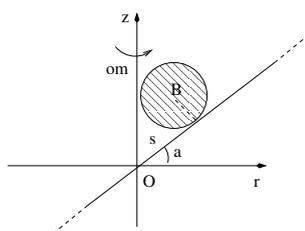


scorrere su una guida rettilinea incernierata nell'origine  $O$ . Inoltre delle molle di ugual costante elastica  $k$  collegano  $O$  a  $P_1$ , e  $P_j$  a  $P_{j+1}$ ,  $j = 1 \dots N - 1$ . Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione  $g$ . Supponiamo che la guida sia liscia e che i punti materiali possano attraversarsi a vicenda. Si usino come coordinate lagrangiane l'angolo  $\theta$  che la guida forma con la direzione verticale, l'ascissa  $s_1$  di  $P_1$  sulla guida e le ascisse relative  $s_j, j = 2 \dots N$  dei  $P_j$  calcolate rispetto ai  $P_{j-1}$  sulla guida.

- (i) Scrivere la lagrangiana del sistema.
- (ii) Calcolare tutte le configurazioni di equilibrio.
- (iii) Determinare la stabilità degli equilibri.

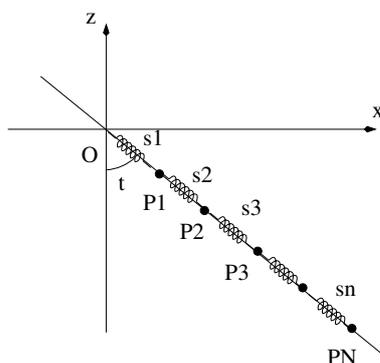
**Esercizio 53.** Si fissi un riferimento  $Oxyz$  con asse  $Oz$  verticale ascendente e si consideri il sistema meccanico descritto in figura, mobile nel piano  $Orz$ , dove  $Or$  è un asse giacente nel piano  $Oxy$ . Il sistema è formato da un disco omogeneo di massa  $m$  e raggio  $R$  che può rotolare senza strisciare su una guida rettilinea passante per  $O$ , che forma un angolo costante  $\alpha \in (0, \pi/2)$  con l'asse  $Or$ . Il piano  $Orz$  viene fatto ruotare attorno all'asse  $Oz$  con velocità angolare costante  $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$ . Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione  $g$ . Usando come coordinata l'ascissa  $s$  del baricentro  $B$  del disco sulla guida

- (i) calcolare l'energia potenziale della forza centrifuga agente sul disco nel riferimento rotante;



- (ii) scrivere la lagrangiana e l'equazione di Lagrange;
- (iii) trovare le configurazioni di equilibrio relative, nel riferimento rotante, e discuterne la stabilità.

**Esercizio 54.** Si fissi un sistema di riferimento  $Oxyz$  con asse  $Oz$  verticale ascendente e si consideri il sistema meccanico descritto in figura, mobile nel piano  $Oxz$ , composto da  $N$  punti materiali  $P_1, \dots, P_N$  di ugual massa  $m$ . I punti  $P_j$  possono



scorrere su una guida rettilinea incernierata nell'origine  $O$ . Inoltre delle molle di ugual costante elastica  $k$  collegano  $O$  a  $P_1$ , e  $P_j$  a  $P_{j+1}$ ,  $j = 1 \dots N - 1$ . Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione  $g$ . Supponiamo che la guida sia liscia e che i punti materiali possano attraversarsi a vicenda. Si usino come coordinate lagrangiane l'angolo  $\theta$  che la guida forma con la direzione verticale, l'ascissa  $s_1$  di  $P_1$  sulla guida e le ascisse relative  $s_j, j = 2 \dots N$  dei  $P_j$  calcolate rispetto ai  $P_{j-1}$  sulla guida.

- (i) Scrivere la lagrangiana del sistema.
- (ii) Calcolare tutte le configurazioni di equilibrio.
- (iii) Determinare la stabilità degli equilibri.